

Exercice 2 (5 points) Commun à tous les candidats

Soient les deux nombres complexes : $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = -8 - 8\sqrt{3}i$. On pose : $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

- Donner la forme algébrique de Z .
- Écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
- Écrire Z sous forme exponentielle puis sous forme trigonométrique.

4. En déduire que $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

5. On admet que :

- $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
- pour tous réels a et b , $\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a + b)$.

Résoudre l'équation suivante dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$: $(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cos x - (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \sin x = -2\sqrt{3}$

CORRECTION

Soient les deux nombres complexes : $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = -8 - 8\sqrt{3}i$.

1. $Z = \frac{1 - i}{-8(1 + \sqrt{3}i)} = \frac{(-1 + i)(1 - \sqrt{3}i)}{8(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)} = \frac{-1 + \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})}{32}$

2. $|z_1| = \sqrt{2}$ et $\arg z_1 = -\frac{\pi}{4}$ donc $z_1 = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$|z_2|^2 = 8^2 + 8^2 \times 3 = 8^2 \times 4$ donc $|z_2| = 16$ et $z_2 = 16 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ donc $\arg z_2 = -\pi + \frac{\pi}{3}$ donc $z_2 = 8 e^{i\frac{-2\pi}{3}}$

3. $Z = \frac{\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{8 e^{-i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{8} e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{8} e^{i\frac{5\pi}{12}}$ ou encore $Z = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}\right)$.

4. $Z = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{-1 + \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})}{32}$ donc en égalant les parties réelles : $\frac{\sqrt{2}}{8} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{32}$

$\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$ soit $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{(-1 + \sqrt{3})\sqrt{2}}{8}$ donc $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

5. On admet que :

- $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
- pour tous réels a et b , $\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a + b)$.

Résoudre l'équation suivante dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$: $(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cos x - (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \sin x = -2\sqrt{3}$

$(\sqrt{6} + \sqrt{2}) = 4 \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 4 \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

donc l'équation devient : $4 \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) \cos x - 4 \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \sin x = -2\sqrt{3} \Leftrightarrow 4 \cos\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) = -2\sqrt{3} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) = \cos \frac{7\pi}{6} \Leftrightarrow x + \frac{5\pi}{12} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ou $x + \frac{5\pi}{12} = -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6} - \frac{5\pi}{12} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ou $x = -\frac{7\pi}{6} - \frac{5\pi}{12} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ou $x = -\frac{19\pi}{12} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$