On définit la suite (u_n) définie par $u_1 = 2$ et pour tout n supérieur ou égal à 1 par la relation de récurrence :
si 2^{n+1} divise u_n, alors $u_{n+1} = 2 \times 10^n + u_n$, sinon $u_{n+1} = 10^n + u_n$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, 2^n divise u_n.

CORRECTION

Initialisation : $u_1 = 2$ donc 2^1 divise u_1
Hérédité : Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, si 2^n divise u_n alors 2^{n+1} divise u_{n+1}.

si 2^{n+1} divise u_n, alors il existe un entier k tel que $u_n = 2^{n+1} k$, et $u_{n+1} = 2 \times 10^n + u_n$,
$u_{n+1} = 2 \times (2 \times 5)^n + u_n = 2^{n+1} \times 5^n + 2^{n+1} k$, donc $u_{n+1} = 2^{n+1}(5^n + k)$ donc 2^{n+1} divise u_{n+1}.

Si 2^{n+1} ne divise pas u_n, alors $u_n = 2^n q$ avec q impair et $u_{n+1} = 10^n + u_n = 2^n \times 5^n + 2^n q$,
$u_{n+1} = 2^n (5^n + q)$
q est un nombre impair et 5^n aussi donc leur somme est un nombre pair donc il existe un entier q' tel que $5^n + q = 2q'$
en remplaçant $u_{n+1} = 2^n \times 2q' = 2^{n+1} q'$
Dans tous les cas, que 2^{n+1} divise ou pas u_n, si 2^n divise u_n alors 2^{n+1} divise u_{n+1}.

Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, 2^n divise u_n.