Amérique du Nord mai 2014

Un volume constant de 2 200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins A et B.

Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.

On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 800 m^3 d'eau et le bassin B contient 1 400 m^3 d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n, on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin A à la fin du nième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m^3, contenu dans le bassin B à la fin du nième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 800$ et $b_0 = 1400$.

1. Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit ?

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \dfrac{3}{4} a_n + 330$.

3. L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1 100.

Recopier cet algorithme en complétant les parties manquantes.

Entrée	n est un entier naturel
	a est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à a la valeur 800
Traitement	Tant que $a < 1100$, faire :
	Affecter à a la valeur ...
	Affecter à n la valeur ...
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

4. Pour tout entier naturel n, on note $u_n = a_n - 1320$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Exprimer u_n en fonction de n. En déduire que, pour tout entier naturel n, $a_n = 1320 - 520 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau.

Proposer une méthode pour répondre à ce questionnement.

CORRECTION

1. Le volume total d'eau du circuit est conservé donc est toujours égal à 2 200 donc $a_n + b_n = 2\,200$

2. Tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A donc le jour suivant le bassin A reçoit $0{,}15\, b_n$
Tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B donc le jour suivant le bassin A perd $0{,}1\, a_n$ donc $a_{n+1} = a_n + 0{,}15\, b_n - 0{,}1\, a_n = 0{,}9\, a_n + 0{,}15\, b_n$

$b_n = 2200 - a_n$ donc $a_{n+1} = 0{,}9\, a_n + 0{,}15\,(2\,200 - a_n) = 0{,}75\, a_n + 330$ soit, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + 330$.

3.

Entrée	n est un entier naturel a est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 0 Affecter à a la valeur 800
Traitement	Tant que $a < 1100$, faire : Affecter à a la valeur $0{,}75\, a + 330$ Affecter à n la valeur $n + 1$ Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

4. *a.* $u_{n+1} = a_{n+1} - 1\,320 = 0{,}75\, a_n + 330 - 1\,320$ or $u_n = a_n - 1\,320$ donc $a_n = u_n + 1\,320$

$u_{n+1} = 0{,}75\,(u_n + 1\,320) - 990$ soit $u_{n+1} = \frac{3}{4} u_n$

La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 800 - 1320 = -520$ et de raison $\frac{3}{4}$.

b. Pour tout entier n, $u_n = -520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Pour tout entier naturel n, $a_n = u_n + 1\,320$ donc $a_n = 1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

5. $a_n + b_n = 2\,200$, un jour donné, les deux bassins ont, au mètre cube près, le même volume d'eau alors $a_n = b_n = 1\,100$ donc

$1\,100 = 1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$ soit $520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 220$

$\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{22}{32} = \frac{11}{16}$ donc $n \ln\frac{3}{4} = \ln\frac{11}{16}$ soit $n = \dfrac{\ln\frac{11}{16}}{\ln 0{,}75}$ soit $n \approx 2{,}99$

<u>Vérification :</u> $a_3 = 1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3$ donc $a_3 = 1100{,}625$ m^3 et $b_3 = 2200 - a_3 = 1099{,}375$ m^3, $a_3 - b_3 = 1{,}25$

À la fin du troisième jour, les deux bassins auront, au m^3 près des volumes identiques.