Centres étrangers juin 2018

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse inexacte ou non justifiée ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. Un type d'oscilloscope a une durée de vie, exprimée en année, qui peut être modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

On sait que la durée de vie moyenne de ce type d'oscilloscope est de 8 ans.

Affirmation 1 : pour un oscilloscope de ce type choisi au hasard et ayant déjà fonctionné 3 ans, la probabilité que la durée de vie soit supérieure ou égale à 10 ans, arrondie au centième, est égale à 0,42.

On rappelle que si X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, on a pour tout réel t positif :

$$P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

2. En 2016, en France, les forces de l'ordre ont réalisé 9,8 millions de dépistages d'alcoolémie auprès des automobilistes, et 3,1 % de ces dépistages étaient positifs.

Source : OFDT (Observatoire Français des Drogues et des Toxicomanies)

Dans une région donnée, le 15 juin 2016, une brigade de gendarmerie a effectué un dépistage sur 200 automobilistes.

Affirmation 2 : en arrondissant au centième, la probabilité que, sur les 200 dépistages, il y ait eu strictement plus de 5 dépistages positifs, est égale à 0,59.

3. On considère dans R l'équation : $\ln(6x - 2) + \ln(2x - 1) = \ln(x)$.

Affirmation 3 : l'équation admet deux solutions dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

4. On considère dans C l'équation : $(4z^2 - 20z + 37)(2z - 7 + 2i) = 0$.

Affirmation 4 : les solutions de l'équation sont les affixes de points appartenant à un même cercle de centre le point P d'affixe 2.

CORRECTION

1. La durée de vie moyenne de ce type d'oscilloscope est de 8 ans donc $\frac{1}{\lambda} = 8$ soit $\lambda = 0{,}125$.

D suit une loi sans vieillissement donc $P_{D \geq 3}(D \geq 10) = P(D \geq 10 - 7) = 1 - P(D < 7) = e^{-7\lambda}$ donc $P_{D \geq 3}(D \geq 10) = e^{-0{,}875} \approx 0{,}42$

Affirmation 1 : VRAI

2. On a une succession de 200 expériences aléatoires identiques et indépendantes. Chacune d'elles a deux issues :

- réussite : le dépistage est positif ($p = 0{,}031$)
- échec : le dépistage est négatif ($q = 1 - p = 0{,}969$)

donc la variable aléatoire X, comptant le nombre de dépistages positifs suit une loi binomiale de paramètres (100 ; 0,031).

$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5)$ soit $1 - 0{,}411$ donc $P(X > 5) \approx 0{,}59$

Affirmation 2 : VRAI

3. Si $x \in \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$, $6x - 2 > 1$ et $2x - 1 > 0$ et $x > 0$ donc l'équation est définie sur $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

$\ln(6x - 2) + \ln(2x - 1) = \ln(x) \Leftrightarrow \ln[(6x - 2)(2x - 1)] = \ln(x)$

$\Leftrightarrow 12x^2 - 10x + 2 = x \Leftrightarrow 12x^2 - 11x + 2 = 0$

$\Delta = 11^2 - 4 \times 2 \times 12 = 25$ donc $x_1 = \frac{11 - 5}{24} = \frac{1}{4}$ et $x_2 = \frac{11 + 5}{24} = \frac{2}{3}$, $\frac{1}{4} \notin \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ et $\frac{2}{3} \in \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ donc l'équation admet une seule solution dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

Affirmation 3 : FAUX

4. $(4z^2 - 20z + 37)(2z - 7 + 2i) = 0 \Leftrightarrow 4z^2 - 20z + 37 = 0$ ou $2z - 7 + 2i = 0$

$4z^2 - 20z + 37 = 0$

$\Delta = 400 - 16 \times 37 = -192$ donc $z_1 = \frac{20 - 8i\sqrt{3}}{8} = \frac{5 - 2i\sqrt{3}}{2}$ ou $z_2 = \frac{5 + 2i\sqrt{3}}{2}$

$2z - 7 + 2i = 0 \Leftrightarrow z = \frac{7 - 2i}{2}$

$z - 2 = \frac{7 - 2i}{2} - 2 = \frac{3 - 2i}{2}$ donc $|z - 2| = \frac{\sqrt{3^2 + 2^2}}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ donc le cercle C de centre P(2) passant par le point d'affixe $\frac{3 - 2i}{2}$ a pour rayon $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Soit A le point d'affixe $\frac{5 + 2i\sqrt{3}}{2}$, $|z - z_A| = \left|\frac{5 + 2i\sqrt{3}}{2} - 2\right| = \left|\frac{1 + 2i\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{1^2 + 4 \times 3}}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

donc A appartient au cercle C.

Le point B d'affixe $\frac{5 - 2i\sqrt{3}}{2}$, $|z - z_B| = \left|\frac{5 - 2i\sqrt{3}}{2} - 2\right| = \left|\frac{1 - 2i\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{1^2 + 4 \times 3}}{2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

donc B appartient au cercle C.

Affirmation 4 : VRAI