Antilles-Guyane septembre 2016

Parmi les ordinateurs d'un parc informatique, 60 % présentent des failles de sécurité.
Afin de pallier ce problème, on demande à un technicien d'intervenir chaque jour pour traiter les défaillances.
On estime que chaque jour, il remet en état 7 % des ordinateurs défaillants, tandis que de nouvelles failles apparaissent chez 3 % des ordinateurs sains. On suppose de plus que le nombre d'ordinateurs est constant sur la période étudiée.
Pour tout entier naturel n, on note a_n la proportion d'ordinateurs sains de ce parc informatique au bout de n jours d'intervention, et b_n la proportion d'ordinateurs défaillants au bout de n jours.
Ainsi $a_0 = 0{,}4$ et $b_0 = 0{,}6$.

Partie A

1. Décrire la situation précédente à l'aide d'un graphe ou d'un arbre pondéré.

2. Déterminer a_1 et b_1.

3. Pour tout entier naturel n, exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0{,}97 & 0{,}07 \\ 0{,}03 & 0{,}93 \end{pmatrix}$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

a. Justifier que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = A\, X_n$.

b. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

c. Calculer, à l'aide de la calculatrice, X_{30}. En donner une interprétation concrète (les coefficients seront arrondis au millième).

Partie B

1. On pose $D = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0{,}9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0{,}07 \\ 0{,}03 \end{pmatrix}$.

a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} + b_{n+1} = 1$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = D\, X_n + B$

2. On pose, pour tout entier naturel n, $Y_n = X_n - 10\, B$.

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+1} = D\, Y_n$.

b. On admet que pour tout entier naturel n, $Y_n = D^n\, Y_0$.

En déduire que pour tout entier naturel n, $X_n = D^n (X_0 - 10\, B) + 10\, B$.

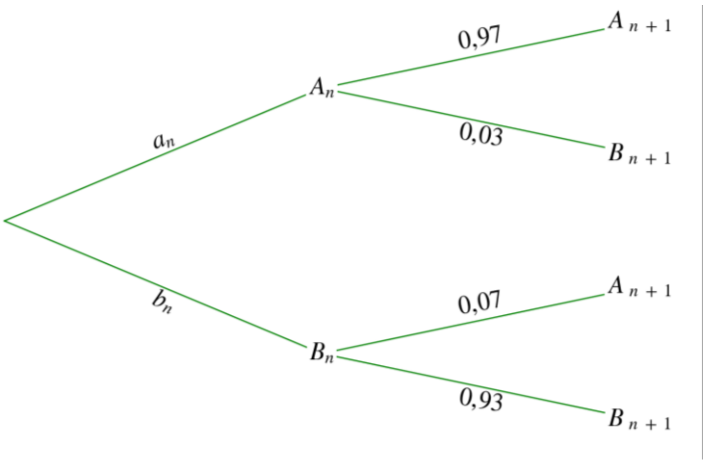
c. Donner l'expression de D^n puis en déduire a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de n.

3. Selon cette étude, que peut-on dire de la proportion d'ordinateurs défaillants sur le long terme ?

CORRECTION

Partie A

1.



2. $a_1 = 0{,}97\, a_0 + 0{,}07\, b_0 = 0{,}97 \times 0{,}4 + 0{,}07 \times 0{,}6 = 0{,}43$
$b_1 = 1 - a_1 = 0{,}57$

3. $a_{n+1} = 0{,}97\, a_n + 0{,}07\, b_n$ et $b_{n+1} = 0{,}03\, a_n + 0{,}93\, b_n$.

4. *a.* $A\, X_n = \begin{pmatrix} 0{,}97 & 0{,}07 \\ 0{,}03 & 0{,}93 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}97\, a_n + 0{,}07\, b_n \\ 0{,}03\, a_n + 0{,}93\, b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$ donc pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = A\, X_n$.

b. Initialisation : $A \neq O$ donc $A^0 = I$ (matrice identité) donc $X_0 = A^0 X_0$. La propriété est initialisée.
Hérédité : montrons pour tout entier n que si $X_n = A^n X_0$, alors $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$.
$X_{n+1} = A\, X_n$ or $X_n = A^n X_0$, donc $X_{n+1} = A \times A^n X_0$ soit $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$.
La propriété est héréditaire
La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout n.
On a donc démontré que, pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

c. $X_{30} = \begin{pmatrix} 0,687 \\ 0,313 \end{pmatrix}$ donc au bout de 30 jours, 68,7 % des ordinateurs sont sains et 31,3 % sont défectueux.

Partie B

1. ***a.*** Un ordinateur ne peut qu'être sain (au bout de $n + 1$ jours, probabilité a_{n+1}) ou défectueux (au bout de $n + 1$ jours, probabilité b_{n+1}) donc, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} + b_{n+1} = 1$.

b. $D\,X_n + B = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,03 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9\,a_n + 0,07 \\ 0,9\,b_n + 0,03 \end{pmatrix}$

or $\begin{cases} a_n + b_n = 1 \\ a_{n+1} = 0,97\,a_n + 0,07\,b_n \\ b_{n+1} = 0,03\,a_n + 0,93\,b_n \end{cases}$ donc $\begin{cases} a_{n+1} = 0,97\,a_n + 0,07\,(1 - a_n) \\ b_{n+1} = 0,03\,(1 - b_n) + 0,93\,b_n \end{cases}$ donc $\begin{cases} a_{n+1} = 0,97\,a_n - 0,07\,a_n + 0,07 \\ b_{n+1} = -0,03\,b_n + 0,93\,b_n + 0,03 \end{cases}$ soit

$\begin{cases} a_{n+1} = 0,9\,a_n + 0,07 \\ b_{n+1} = 0,9\,b_n + 0,03 \end{cases}$ donc $D\,X_n + B = \begin{pmatrix} 0,9\,a_n + 0,07 \\ 0,9\,b_n + 0,03 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$ donc, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = D\,X_n + B$

2. ***a.*** $Y_n = X_n - 10\,B$ donc $X_n = Y_n + 10\,B$ donc en remplaçant dans $X_{n+1} = D\,X_n + B$

$Y_{n+1} + 10\,B = D\,(Y_n + 10\,B) + B$

$Y_{n+1} = D\,Y_n + 10\,D\,B + B - 10\,B$ or $D\,B = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,07 \\ 0,03 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,07 \times 0,9 \\ 0,03 \times 0,9 \end{pmatrix} = 0,9\,B$

$Y_{n+1} = D\,Y_n + 10 \times 0,9\,B - 9\,B$ donc $Y_{n+1} = D\,Y_n$

b. $X_n = Y_n + 10\,B$ et $Y_n = D^n\,Y_0$ donc $X_n = D^n\,Y_0 + 10\,B$

$Y_n = X_n - 10\,B$ donc $Y_0 = X_0 - 10\,B$ donc pour tout entier naturel n, $X_n = D^n\,(X_0 - 10\,B) + 10\,B$.

c. D est une matrice diagonale donc $D^n = \begin{pmatrix} 0,9^n & 0 \\ 0 & 0,9^n \end{pmatrix}$, $10\,B = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix}$

$X_n = D^n\,(X_0 - 10\,B) + 10\,B$, $X_0 - 10\,B = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,3 \\ 0,3 \end{pmatrix}$

donc $D^n\,(X_0 - 10\,B) + 10\,B = \begin{pmatrix} 0,9^n & 0 \\ 0 & 0,9^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,3 \\ 0,3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,3 \times 0,9^n + 0,7 \\ 0,3 \times 0,9^n + 0,3 \end{pmatrix}$

$a_{n+1} = -0,3 \times 0,9^n + 0,7$ et $b_{n+1} = 0,3 \times 0,9^n + 0,3$.

3. $-1 < 0,9 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0,7$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0,3$.

A long terme, 70 % des ordinateurs seront sains et 30 % défaillants.