Asie juin 2014

Partie A

Le but de celle partie est de démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini en raisonnant par l'absurde.

1. On suppose qu'il existe un nombre fini de nombres premiers notés $p_1, p_2, ..., p_n$.

On considère le nombre E produit de tous les nombres premiers augmenté de 1 :

$$E = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + 1.$$

Démontrer que E est un entier supérieur ou égal à 2, et que E est premier avec chacun des nombres $p_1, p_2, ..., p_n$.

2. En utilisant le fait que E admet un diviseur premier conclure.

Partie B

Pour tout entier naturel $k > 2$, on pose $M_k = 2^k - 1$.

On dit que M_k est le k-ième nombre de Mersenne.

1. *a.* Reproduire et compléter le tableau suivant, qui donne quelques valeurs de M_k :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_k	3								

b. D'après le tableau précédent, si k est un nombre premier, peut-on conjecturer que le nombre M_k est premier ?

2. Soient p et q deux entiers naturels non nuls.

a. Justifier l'égalité : $1 + 2^p + (2^p)^2 + (2^p)^3 + \ldots + (2^p)^{q-1} = \dfrac{(2^p)^q - 1}{2^p - 1}$

b. En déduire que $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$.

c. En déduire que si un entier k supérieur ou égal à 2 n'est pas premier, alors M_k ne l'est pas non plus.

3. *a.* Prouver que le nombre de Mersenne M_{11} n'est pas premier.

b. Que peut-on en déduire concernant la conjecture de la question 1. *b.* ?

Partie C

Le test de Lucas-Lehmer permet de déterminer si un nombre de Mersenne donné est premier. Ce test utilise la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n^2 - 2$.

Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, le test permet d'affirmer que le nombre M_n est premier si et seulement si $u_{n-2} \equiv 0$ modulo M_n. Cette propriété est admise dans la suite.

1. Utiliser le test de Lucas-Lehmer pour vérifier que le nombre de Mersenne M_5 est premier.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

L'algorithme suivant, qui est incomplet, doit permettre de vérifier si le nombre de Mersenne M_n est premier, en utilisant le test de Lucas-Lehmer.

Variables :	*u*, *M*, *n* et *i* sont des entiers naturels
Initialisation :	*u* prend la valeur 4
Traitement :	Demander un entier $n \geq 3$
	M prend la valeur ....
	Pour *i* allant de 1 à ... faire
	│ *u* prend la valeur ...
	Fin Pour
	Si *M* divise *u* alors afficher «*M* .... »
	sinon afficher «*M* .... »

Recopier et compléter cet algorithme de façon à ce qu'il remplisse la condition voulue.

CORRECTION

Partie A

1. Les nombres premiers sont des entiers non nul donc $p_1 \geq 1$, $p_2 \geq 1$ …. et $p_n \geq 1$ donc $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n \geq 1$ donc $E \geq 2$.

$E - p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n = 1$ donc d'après le théorème de Bézout, E est premier avec chacun des nombres $p_1, p_2, ..., p_n$

2. Si l'ensemble des nombres premiers est fini, E admet un diviseur premier, alors ce diviseur figure dans le produit $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$, or E est premier avec chacun des nombres $p_1, p_2, ..., p_n$
Aucun de ces nombres n'est donc un diviseur de E, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse donc l'ensemble des nombres premiers est infini.

Partie B

1. ***a.***

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_k	3	7	15	31	63	127	255	511	1023

b. Si k est un nombre premier, $k \in \{2 ; 3 ; 5 ; 7\}$ or 3 ; 7 ; 31 ; et 127 sont des nombres premiers, on peut donc supposer que si k est premier, M_k est premier.

2. ***a.*** Si $b \neq 1$ alors $1 + b + b^2 + \ldots + b^n = \dfrac{b^{n+1}-1}{b-1}$ donc $1 + 2^p + (2^p)^2 + (2^p)^3 + \ldots + (2^p)^{q-1} = \dfrac{(2^p)^q - 1}{2^p - 1}$

b. $2^{pq} - 1 = (2^p - 1)\,(1 + 2^p + (2^p)^2 + (2^p)^3 + \ldots + (2^p)^{q-1})$
$1 + 2^p + (2^p)^2 + (2^p)^3 + \ldots + (2^p)^{q-1}$ est un entier donc $2^p - 1$ divise $2^{pq} - 1$.

c. Si k n'est pas premier, il existe deux entiers p et q autres que 1 et k (donc supérieurs ou égaux à 2) tels que $k = p\,q$
$2^p - 1$ divise $2^{pq} - 1$ donc $2^p - 1$ divise M_k
$2^p - 1 \geq 2^2 - 1$ soit $2^p - 1 \geq 3$ donc $2^p - 1 \neq 1$
$(1 + 2^p + (2^p)^2 + (2^p)^3 + \ldots + (2^p)^{q-1}) \geq 1 + 2^p \geq 1 + 2^2$ donc $(1 + 2^p + (2^p)^2 + (2^p)^3 + \ldots + (2^p)^{q-1}) \neq 1$ donc $2^p - 1 \neq M_k$
donc M_k admet un diviseur autre que 1 et lui-même donc n'est pas premier.

3. ***a.*** $M_{11} = 2047 = 23 \times 87$ donc M_{11} n'est pas premier.

b. M_{11} n'est pas premier et 11 est un nombre premier donc la conjecture de la question 1. *b.* est fausse.

Partie C

1. le nombre M_5 est premier si et seulement si $u_{5-2} \equiv 0$ modulo M_n, soit $u_3 \equiv 0\ [M_5]$

$u_1 = 4^2 - 2 = 14$, $u_2 = 14^2 - 2 = 194$ et $u_3 = 194^2 - 2 = 37\ 634$
$M_5 = 31$ et $37\ 634 = 31 \times 1\ 214$ donc $u_3 \equiv 0\ [M_5]$, le nombre de Mersenne M_5 est premier.

2.

Variables :	u, M, n et i sont des entiers naturels
Initialisation :	u prend la valeur 4
Traitement :	Demander un entier $n \geq 3$
	M prend la valeur $\mathbf{2^n - 1}$
	Pour i allant de 1 à $\mathbf{n - 2}$ faire
	│ u prend la valeur $\mathbf{u^2 - 2}$
	Fin Pour
	Si M divise u alors afficher « M **est premier** »
	sinon afficher « M **n'est pas premier** »