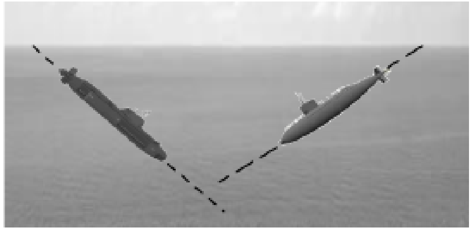
Liban mai 2018

EXERCICE 3 (4 points) Commun à tous les candidats

L'objectif de cet exercice est d'étudier les trajectoires de deux sous-marins en phase de plongée.



On considère que ces sous-marins se déplacent en ligne droite, chacun à vitesse constante.
À chaque instant t, exprimé en minutes, le premier sous-marin est repéré par le point $S_1(t)$ et le second sous-marin est repéré par le point $S_2(t)$ dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ orthonormé dont l'unité est le mètre.

Le plan défini par $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ représente la surface de la mer. La cote z est nulle au niveau de la mer, négative sous l'eau.

1. On admet que, pour tout réel $t \geq 0$, le point $S_1(t)$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x(t) = 140 - 60\,t \\ y(t) = 105 - 90\,t \\ z(t) = -170 - 30\,t \end{cases}$.

a. Donner les coordonnées du sous-marin au début de l'observation.

b. Quelle est la vitesse du sous-marin ?

2. On se place dans le plan vertical contenant la trajectoire du premier sous-marin.
Déterminer l'angle α que forme la trajectoire du sous-marin avec le plan horizontal.
On donnera l'arrondi de α à 0,1 degré près.

3. Au début de l'observation, le second sous-marin est situé au point $S_2(0)$ de coordonnées (68 ; 135 ; − 68) et atteint au bout de trois minutes le point $S_2(3)$ de coordonnées (−202 ; − 405 ; − 248) avec une vitesse constante.
À quel instant t, exprimé en minutes, les deux sous-marins sont-ils à la même profondeur ?

CORRECTION

1. *a.* Si $t = 0$ alors les coordonnées du sous-marin au début de l'observation sont A (140 ; 105 ; – 170)

b. En cinématique, le vecteur vitesse est un vecteur obtenu en dérivant les coordonnées cartésiennes de la position par rapport au temps. $\overrightarrow{v_1(t)}$: $\begin{cases} x'(t) = -60 \\ y'(t) = -90 \\ z'(t) = -30 \end{cases}$.

La norme de ce vecteur dans ce repère orthonormé nous donne la vitesse. $v_1 = \sqrt{60^2 + 90^2 + 30^2} = 30\sqrt{14}$

2. B est le point de la trajectoire du premier sous-marin obtenu pour $t = 1$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$ donc (BC) est perpendiculaire au niveau de la mer

Le plan (ABC) contient la droite (AB) donc la trajectoire du sous-marin et est perpendiculaire au niveau de la mer.

Le triangle ABC est rectangle en C : $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix} 60 \\ 90 \\ 0 \end{pmatrix}$

(AC) est parallèle au niveau de la mer (droite du plan $z = -170$) donc α est une mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ -30 \end{pmatrix}$, AB = $\sqrt{60^2 + 90^2 + 30^2} = 30\sqrt{14}$ et

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix} -60 \\ -90 \\ 0 \end{pmatrix}$, AC = $\sqrt{60^2 + 90^2 + 0^2} = 30\sqrt{13}$

$\cos\alpha = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$ soit $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{14}}$ donc $\alpha \approx 15{,}5\,°$

3. Au début de l'observation, le second sous-marin est situé au point $S_2(0)$ de coordonnées (68 ; 135 ; − 68) et atteint au bout de trois minutes le point $S_2(3)$ de coordonnées (− 202 ; − 405 ; − 248) avec une vitesse constante.

Le sous-marin se déplace à vitesse constante donc $\overrightarrow{v_2(t)}$ (a ; b ; c) où a, b et c sont des réels.

donc pour tout réel $t \geq 0$, le point $S_2(t)$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x(t) = 68 + a\,t \\ y(t) = 135 + b\,t \\ z(t) = -68 + c\,t \end{cases}$.

Si $t = 3$ alors $\begin{cases} x(3) = 68 + 3\,a = -202 \\ y(3) = 135 + 3\,b = -405 \\ z(3) = -68 + 3\,c = -248 \end{cases}$ donc

$\begin{cases} 3\,a = -270 \\ 3\,b = -540 \\ 3\,c = -180 \end{cases}$ soit $a = -90$; $b = -180$ et $c = -60$

Pour tout réel $t \geq 0$, le point $S_2(t)$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x(t) = 68 - 90\,t \\ y(t) = 135 - 180\,t \\ z(t) = -68 - 60\,t \end{cases}$.

Donc l'instant t, exprimé en minutes, pour lequel les deux sous-marins sont à la même profondeur correspond à l'instant où les cotes des deux sous-marins sont identiques soit :

$-170 - 30\,t = -68 - 60\,t$

$\Leftrightarrow 30\,t = 170 - 68$

$\Leftrightarrow t = 3{,}4$ min