EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

Certains résultats de la PARTIE A pourront être utilisés dans la PARTIE B, mais les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

PARTIE A :

On définit :

– la suite (u_n) par : $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.

– la suite (S_n) par : pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots u_n$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$. En déduire la limite de la suite (u_n).

2. *a.* Déterminer le sens de variation de la suite (S_n).

b. Calculer S_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (S_n).

PARTIE B :

Etant donné une suite (x_n), de nombres réels, définie pour tout entier naturel n, on considère la suite (S_n) définie par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$.

Indiquer pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse.
Justifier dans chaque cas.

Proposition 1 : si la suite (x_n) est convergente, alors la suite (S_n) l'est aussi.

Proposition 2 : les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

EXERCICE 2 5 points Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A :

On considère le système de congruences : $\begin{cases} n \equiv 2 \text{ (modulo 3)} \\ n \equiv 1 \text{ (modulo 5)} \end{cases}$, où n désigne un entier relatif.

1. Montrer que 11 est solution de (S).

2. Montrer que si n est solution de (S) alors $n - 11$ est divisible par 3.

3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11 + 15k$, où k désigne un entier relatif.

PARTIE B :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}\,;\, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z' et g celle qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z'' définies par : $z' = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\, z$ et $z'' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}\, z$.

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g.

2. On considère les points A_0 et B_0 d'affixes respectives $a_0 = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ et $b_0 = 4\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}$.

Soient (A_n) et (B_n) les suites de points définies par les relations de récurrences : $A_{n+1} = f(A_n)$ et $B_{n+1} = g(B_n)$.

On note a_n et b_n les affixes respectives de A_n et B_n.

a. Quelle est la nature de chacun des triangles $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$?

b. En déduire la nature du polygone $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$.

3. *a.* Montrer que les points B_n sont situés sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b. Indiquer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\mathrm{O}B_n}, \overrightarrow{\mathrm{O}B_{n+2}})$.

c. En déduire la nature du polygone $B_0B_2B_4B_6B_8$.

4. *a.* Exprimer a_n et b_n en fonction de n.

b. Montrer que les entiers n pour lesquels les points A_n et B_n sont simultanément sur l'axe des réels sont les solutions du système (S) de la PARTIE A.

EXERCICE 3 7 points Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 2 - \dfrac{4\,e^x}{e^x + 3}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. *a.* Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Démontrer que la droite D_1 d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe C .

c. Étudier la position de C par rapport à D_1.

2. *a.* On note f' la fonction dérivée de f . Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x, on a : $f'(x) = \left(\dfrac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$

b. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de la fonction f .

3. *a.* Que peut-on dire de la tangente D_2 à la courbe C au point I d'abscisse ln 3 ?

b. En utilisant les variations de la fonction f , étudier la position de la courbe C par rapport à D_2.

4. *a.* Montrer que la tangente D_3 à la courbe C au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = \dfrac{1}{4}x + 1$.

b. Étudier la position de la courbe C par rapport à la tangente D_3 sur l'intervalle $]-\infty; \ln 3]$.

On pourra utiliser la dérivée seconde de f notée f'' définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par : $f''(x) = \dfrac{12\,e^x\,(e^x - 3)}{(e^x + 3)^3}$

5. On admet que le point I est centre de symétrie de la courbe C .

Tracer la courbe C , les tangentes D_2, D_3 et les asymptotes à la courbe C . On rappelle que l'unité graphique choisie est 2 cm.

6. *a.* Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 3}$.

b. Soit λ un réel strictement négatif.

On note $A(\lambda)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par D_1, C et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$.

Montrer que $A(\lambda) = 4\ln 4 - 4\ln(e^\lambda + 3)$

c. Calculer $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$.

EXERCICE 4 4 points Commun à tous les candidats

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.

L'urne U_1 contient 2 billes vertes et 8 billes rouges toutes indiscernables au toucher.

L'urne U_2 contient 3 billes vertes et 7 billes rouges toutes indiscernables au toucher.

Une partie consiste, pour un joueur, à tirer au hasard une bille de l'urne U_1, noter sa couleur et remettre la bille dans l'urne U_1 puis de tirer au hasard une bille de l'urne U_2, noter sa couleur et remettre la bille dans l'urne U_2.

À la fin de la partie, si le joueur a tiré deux billes vertes il gagne un lecteur MP3. S'il a tiré une bille verte, il gagne un ours en peluche. Sinon il ne gagne rien.

On note

V_1 l'évènement : « le joueur tire une boule verte dans U_1 »

V_2 l'évènement : « le joueur tire une boule verte dans U_2 ».

Les évènements V_1 et V_2 sont indépendants.

1. Montrer, à l'aide d'un arbre pondéré, que la probabilité de gagner un lecteur MP3 est $p = 0{,}06$.

2. Quelle est la probabilité de gagner un ours en peluche ?

3. Vingt personnes jouent chacune une partie. Déterminer la probabilité que deux d'entre elles exactement gagnent un lecteur MP3.

On justifiera la réponse et on donnera une valeur approchée du résultat à 10^{-4} près.

4. On appelle n le nombre de personnes participant à la loterie un jour donné et jouant une seule fois.

On note p_n la probabilité que l'une au moins de ces personnes gagne un lecteur MP3.

Déterminer la plus petite valeur de n vérifiant $p_n \geq 0{,}99$.

CORRECTION

EXERCICE 1 4 points Commun à tous les candidats

PARTIE A :

1. $u_0 = 13$ or si $n = 0$, $1 + \dfrac{12}{5^n} = 13$ donc $u_0 = 1 + \dfrac{12}{5^0}$. La propriété est vraie pour $n = 0$.

Montrons pour tout entier naturel n, si $u_n = 1 + \dfrac{12}{5^n}$ alors $u_{n+1} = 1 + \dfrac{12}{5^{n+1}}$.

$u_{n+1} = \dfrac{1}{5} u_n + \dfrac{4}{5}$ or $u_n = 1 + \dfrac{12}{5^n}$ donc $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}\left(1 + \dfrac{12}{5^n}\right) + \dfrac{4}{5} = 1 + \dfrac{12}{5^{n+1}}$.

La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

$-1 < \dfrac{1}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{12}{5^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$

2. *a.* $S_{n+1} - S_n = u_n$ or $u_n > 0$ donc $S_{n+1} - S_n > 0$, la suite (S_n) est croissante.

b. $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots u_n = (n + 1) + \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{12}{5^k} = (n + 1) + \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{12}{5^k} = (n + 1) + 12 \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{5^k}$

$S_n = n + 1 + 12 \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{1}{5}} = n + 1 + 12 \times \dfrac{5}{4} \times \left(1 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n+1}\right) = n + 16 - \dfrac{3}{5^n}$

c. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3}{5^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

PARTIE B :

Proposition 1 : FAUX voir l'exemple ci-dessus : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

Proposition 2 : FAUX ; voir l'exemple ci-dessus : (u_n) est décroissante or la suite (S_n) est croissante.

EXERCICE 2 5 points Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A :

1. $11 = 3 \times 3 + 2$ donc $11 \equiv 2$ (modulo 3) et $11 = 5 \times 2 + 1$ donc $11 \equiv 1$ (modulo 3) donc 11 est solution de (S).

2. Si n est solution de (S) alors $n \equiv 2$ modulo 3 or $11 \equiv 2$ (modulo 3)
donc par différence membre à membre $n - 11 \equiv 0$ (modulo 3) soit $n - 11$ est divisible par 3.

3. De même si n est solution de (S) alors $n \equiv 1$ modulo 5 or $11 \equiv 1$ (modulo 5)
donc par différence membre à membre $n - 11 \equiv 0$ (modulo 5) soit $n - 11$ est divisible par 5.
3 et 5 divisent $n - 11$ et 3 et 5 sont premiers entre eux donc 3×5 divise $n - 11$
si n est solution de (S) alors il existe un entier relatif k tel que $n = 11 + 15\,k$
Réciproquement s'il existe un entier relatif k tel que $n = 11 + 15\,k$; alors $n \equiv 11$ (modulo 3) et $n \equiv 11$ (modulo 5)
or 11 est solution de (S) donc $\begin{cases} n \equiv 2 \text{ (modulo 3)} \\ n \equiv 1 \text{ (modulo 5)} \end{cases}$.
Les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11 + 15\,k$, où k désigne un entier relatif.

PARTIE B :

1. $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} z$ et $z'' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}} z$.
Ces expressions sont de la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} z$ donc ces transformations sont des rotations de centre O d'angle θ.
f est une rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{3}$ et g est une rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{5}$.

2. *a.* Pour tout n de $\mathbb{N}$, A_{n+1} est l'image de A_n par la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{3}$ donc le triangle O $A_n A_{n+1}$ est équilatéral direct.

b. Les triangles OA_0A_1 ; O A_1A_2 ; O A_2A_3 ; O A_3A_4 ; O A_4A_5 ; O A_5A_0 sont équilatéraux donc
$OA_0 = OA_1 = OA_2 = OA_3 = OA_4 = OA_5$ donc le polygone est inscrit dans le cercle de centre O de rayon OA_0
de plus $OA_0 = A_0A_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_0$
donc le polygone est régulier : il s'agit d'un hexagone régulier de centre O.

3. *a.* $b_0 = 4\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}$ donc $OB_0 = |b_0| = |4\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}| = 4$ donc B_0 appartient au cercle Γ de centre O de rayon 4.
Démontrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, si $B_n \in \Gamma$ alors $B_{n+1} \in \Gamma$
$B_n \in \Gamma \Leftrightarrow |b_n| = 4$ or $b_{n+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}} b_n$ donc $|b_{n+1}| = |b_n| = 4$ donc $B_{n+1} \in \Gamma$
La propriété est héréditaire donc pour tout n de $\mathbb{N}$, les points B_n sont situés sur le cercleΓ de centre O de rayon 4.

b. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $b_n \neq 0$ donc $(\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OB_{n+2}}) = \arg \frac{b_{n+2}}{b_n}$ or $b_{n+2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}} b_{n+1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}} b_n$

donc $b_{n+2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}} b_n$ donc $(\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OB_{n+2}}) = \frac{2\pi}{5} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

c. $B_0B_2B_4B_6B_8$ est un pentagone inscrit dans le cercle de centre O de rayon 4.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, $(\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OB_{n+2}}) = \frac{2\pi}{5} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
donc $(\overrightarrow{OB_0}, \overrightarrow{OB_2}) = (\overrightarrow{OB_2}, \overrightarrow{OB_4}) = (\overrightarrow{OB_4}, \overrightarrow{OB_6}) = (\overrightarrow{OB_6}, \overrightarrow{OB_8}) = (\overrightarrow{OB_8}, \overrightarrow{OB_{10}}) = \frac{2\pi}{5} + + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ or $B_{10} = B_0$
Le pentagone est donc régulier.

4. *a.* A_n (resp. B_n) est l'image de A_0 (resp. B_0) par n rotations de même centre O et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$ (resp. $\theta' = \frac{\pi}{5}$), donc par une rotation de même centre O d'angle $n\,\theta = \frac{n\pi}{3}$ (resp. $\frac{n\pi}{5}$) donc $a_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}} a_0 = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n-2)\pi}{3}}$ et $b_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{5}} b_0 = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n-1)\pi}{5}}$

b. A_n est sur l'axe des réels si et seulement si $\arg a_n = k\pi \Leftrightarrow \frac{n-2}{3} = k\pi \Leftrightarrow n - 2 = 3k \Leftrightarrow n \equiv 2$ (modulo 3)
B_n est sur l'axe des réels si et seulement si $\arg b_n = k'\pi \Leftrightarrow \frac{(n-1)\pi}{3} = k'\pi \Leftrightarrow n - 1 = 5k' \Leftrightarrow n \equiv 1$ (modulo 5)
Les entiers n pour lesquels les points A_n et B_n sont simultanément sur l'axe des réels sont les solutions du système (S) de la PARTIE A.

EXERCICE 3 7 points Commun à tous les candidats

1. *a.* $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4\,e^x}{e^x+3} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b. $f(x) - (x+2) = -\dfrac{4\,e^x}{e^x+3}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4\,e^x}{e^x+3} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (x+2) = 0$ donc la droite D_1 d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe C au voisinage de $-\infty$.

c. $f(x) - (x+2) = -\dfrac{4\,e^x}{e^x+3}$, la fonction exponentielle est strictement positive donc $f(x) - (x+2) < 0$ donc la courbe C est en-dessous de la droite D_1 sur $\mathbb{R}$.

2. *a.* $f'(x) = 1 - \dfrac{4\,e^x\,(e^x+3) - 4\,e^x \times e^x}{(e^x+3)^2} = 1 - \dfrac{12\,e^x}{(e^x+3)^2} = \dfrac{(e^x+3)^2 - 12\,e^x}{(e^x+3)^2} = \left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$

b. Pour tout x réel, $f'(x) \geq 0$ donc la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ or $\dfrac{4\,e^x}{e^x+3} = 4 - \dfrac{12}{e^x+3}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4\,e^x}{e^x+3} = 4$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln 3$	$\nearrow$	$+\infty$

3. *a.* $f'(\ln 3) = 0$ donc la tangente D_2 à la courbe C au point I d'abscisse ln 3 est parallèle à l'axe des abscisses et a pour équation $y = \ln 3$

b. Si $x < \ln 3$ alors $f(x) < \ln 3$ donc la courbe C est en-dessous de la droite D_2 sur $]-\infty\,;\ln 3[$

Si $x > \ln 3$ alors $f(x) > \ln 3$ donc la courbe C est au-dessus de la droite D_2 sur $]\ln 3\,;+\infty[$

La courbe et la tangente se coupent pour $x = \ln 3$

4. *a.* $f'(0) = \dfrac{1}{4}$ et $f(0) = 1$ donc la tangente D_3 à la courbe C au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = \dfrac{1}{4}x + 1$.

b. Soit $g(x) = f(x) - \left(\dfrac{1}{4}x + 1\right)$, g est dérivable sur R et $g'(x) = f'(x) - \dfrac{1}{4}$

g' est dérivable sur R et $g''(x) = f''(x) = 2\left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right) \times \left(\dfrac{12}{e^x+3}\right)$ en appliquant que la dérivée de u^n est $n\,u'\,u^{n-1}$

donc $g''(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\ln 3[$ et $g''(\ln 3) = 0$ donc la fonction g' est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; \ln 3]$.

$g'(0) = 0$ donc pour tout x de l'intervalle $]-\infty; 0]$, $g'(x) \geq 0$ et pour tout x de l'intervalle $]0; \ln 3]$, $g'(x) \leq 0$

g admet donc un maximum en $x = 0$ donc pour tout x de l'intervalle $]-\infty; \ln 3]$, $g(x) \leq g(0)$ donc $g(x) \leq 0$.

la courbe C est en-dessous de la droite D_3 sur $]-\infty\,;\ln 3[$

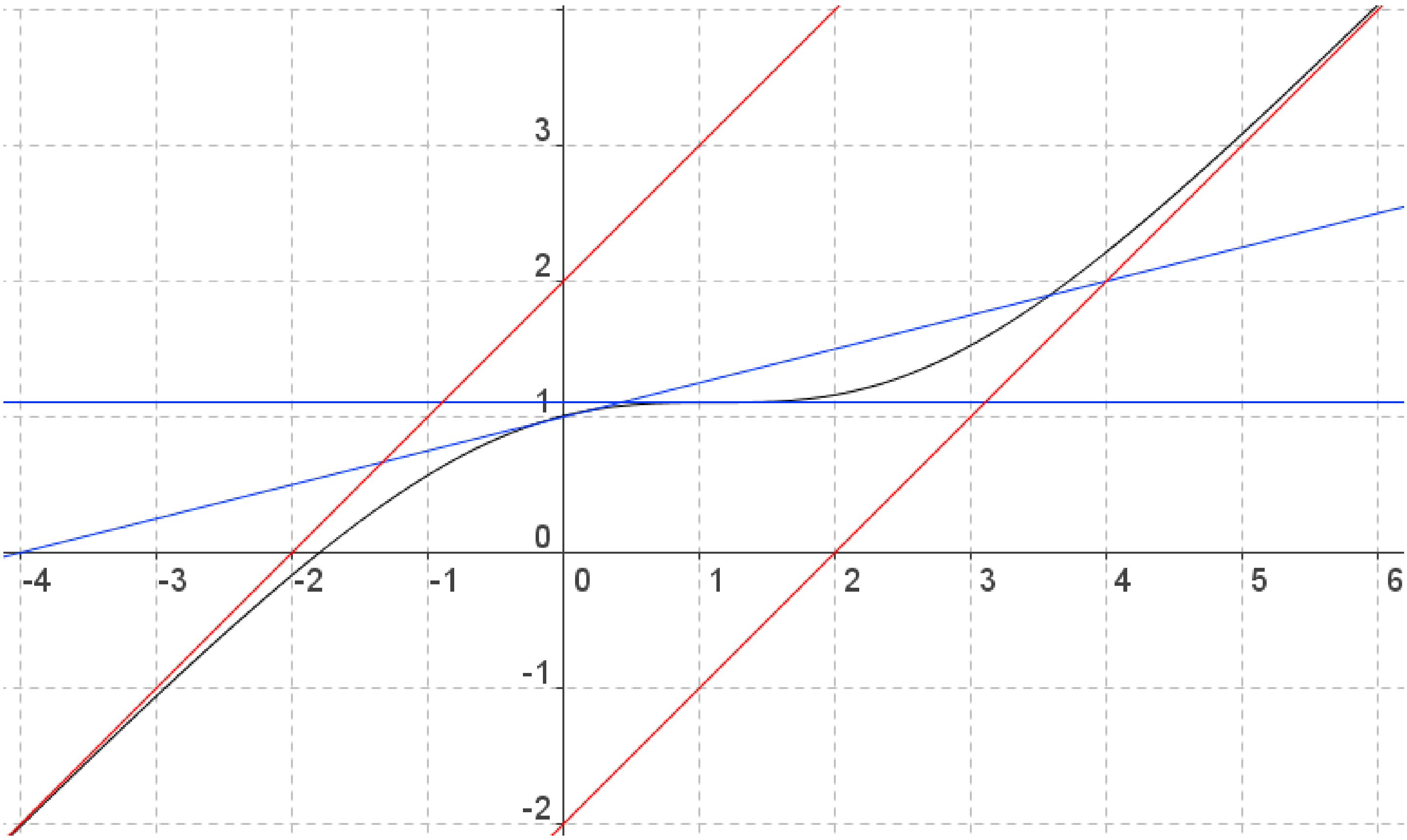
6. *a.* la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \dfrac{e^x}{e^x+3}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u : x \to e^x + 3$.

Pour tout x réel, $e^x + 3 > 0$, donc une primitive de g est la fonction $G : x \to \ln(e^x + 3)$.

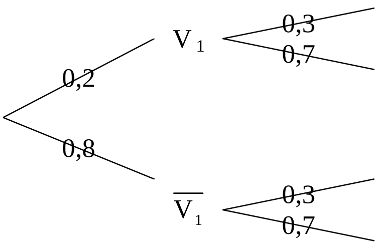
b. la courbe C est en-dessous de la droite D_1 sur $\mathbb{R}$, donc $A(\lambda) = \displaystyle\int_\lambda^0 [(x+2) - f(x)]\,dx = \int_\lambda^0 g(x)\,dx = G(0) - G(\lambda)$

$A(\lambda) = 4 \ln 4 - 4 \ln(e^\lambda + 3)$

c. $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} e^\lambda = 0$, la fonction logarithme népérien est continue sur $]0\,;+\infty[$ donc $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda) = 4 \ln 3$



EXERCICE 4 **4 points** **Commun à tous les candidats**



V_2 2 billes vertes tirées donc la probabilité de gagner un lecteur MP3 est $p = 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}06$.

$\overline{V}_2$, V_2 : une seule bille verte tirée donc la probabilité de gagner un ours en peluche est :
$p = 0{,}2 \times 0{,}7 + 0{,}8 \times 0{,}3 = 0{,}38$.

$\overline{V}_2$ pas de bille verte tirée donc la probabilité de ne rien gagner est $p = 0{,}8 \times 0{,}7 = 0{,}56$.

3. On *a* une succession de 20 expériences aléatoires, identiques et indépendantes, chacune d'elles *a* deux issues :
le joueur gagne un lecteur MP3 ($p = 0{,}06$)
le joueur ne gagne pas un lecteur MP3 ($q = 1 - p = 0{,}94$)
donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de personnes gagnant un lecteur MP3 suit une loi binomiale de paramètres (20 ; 0,06)

$p(X = 2) = \binom{20}{2} 0{,}06^2 \times 0{,}94^{18} \approx 0{,}2246$ à 10^{-4} près.

4. l'événement : « l'une au moins de ces personnes gagne un lecteur MP3 » a pour événement contraire : « aucune personne gagne un lecteur MP3 », donc $p_n = 1 - 0{,}94^n$

$p_n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - 0{,}94^n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - 0{,}99 \geq 0{,}94^n \Leftrightarrow \ln 0{,}01 \geq n \ln 0{,}94 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}94}$ or $\frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}94} \approx 74{,}5$

la plus petite valeur de n vérifiant $p_n \geq 0{,}99$ est donc 75.