1. Etude dans [0 ; π] de l'équation $\sin x = \frac{x}{2}$ (1)

a. T et Δ sont les courbes représentatives respectives des fonctions *g* et *h* définies sur [0 ; π] par *g*(*x*) = sin *x* et *h*(*x*) = $\frac{x}{2}$

Dessiner soigneusement T et Δ sur [0 ; π].
En examinant les 2 courbes, expliquer brièvement pourquoi l'équation (1) possède deux solutions dont l'une est le réel 0

b. *f* est la fonction définie sur [0 ; π] par $f(x) = \frac{x}{2} - \sin x$.

Calculer *f* '(*x*)et donner son signe
Dresser le tableau de variation de *f*

c. En énonçant le théorème utilisé, démontrer que l'équation *f* (*x*) = 0 admet un intervalle $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ une unique solution x_0.

Donner l'encadrement d'amplitude 10^{-2} de x_0.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 1cm). Les angles seront exprimés en radians et les aires en cm^2.

Soit $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, A et B les points de coordonnées respectives (cos θ ; sin θ) et (cos θ ; – sin θ), D le disque de centre O et de rayon 1, et (E) l'ensemble des points de D d'abscisse supérieure ou égale à cos θ.

a. Calculer, en fonction de θ, l'aire T du triangle BOA.

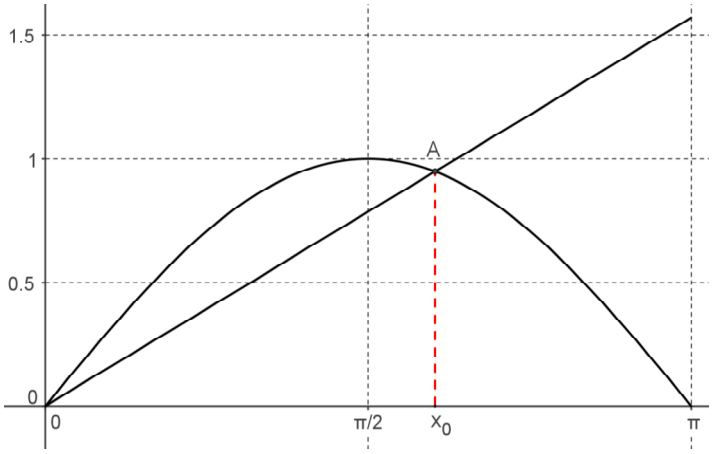
b. On rappelle que l'aire d'un secteur angulaire intercepté par un angle de mesure α (en radians) dans un disque de rayon R est égale à $\alpha \frac{R^2}{2}$.

Calculer, en fonction de θ, l'aire S de (E) (on pourra d'abord calculer S + T)

c. On pose α = 2 θ. Pour quelle valeur de α a-t-on S = T ?

CORRECTION

1. Etude dans [0 ; π] de l'équation $\sin x = \frac{x}{2}$ (1)



a. Δ est un segment de droite qui passe par les points de coordonnées (0 ; 0) et $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

x	0	0,25	0,5	0,75	1	$\frac{\pi}{2}$
g(*x*)	0	0,25	0,48	0,68	0,84	1

x	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3	π
g(*x*)	0,98	0,91	0,78	0,60	0,38	0,14	0

d'où le tracé de la fonction *g*.
Les deux courbes admettent deux points d'intersection : l'un est l'origine du repère l'autre *a* une abscisse x_0 voisine de 1,9 donc l'équation (1) possède deux solutions dont l'une est le réel 0.

b. $f'(x) = \frac{1}{2} - \cos x$.

$\cos x = \frac{1}{2}$ et $x \in [0 ; \pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$.

La fonction cosinus est décroissante sur [0 ; π] donc $\frac{1}{2} - \cos x < 0$ et $x \in [0 ; \pi] \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right[$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
f '(*x*)		–	0	+	
f	0	↘	M	↗	$\frac{\pi}{2}$

avec M = $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

c. La fonction f est définie continue strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$;

L'image par f de $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ est $\left[f(\pi);f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - 1$ donc $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ et $f(\pi) > 0$ donc $0 \in \left[f(\pi);f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ une unique solution x_0.

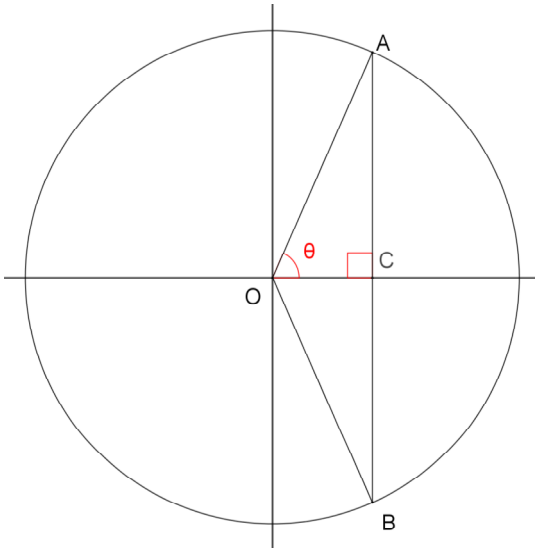
$f(1{,}89) \approx -0{,}0045$ et $f(1{,}90) \approx 0{,}0037$ donc $1{,}89 < x_0 < 1{,}90$

2. *a.* L'aire T du triangle BOA est égale à $\frac{1}{2} \times OC \times AB$

$\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\theta > 0$ et $\sin\theta > 0$

$OC = \cos\theta$ et $AB = 2\,AC = 2\sin\theta$ donc $T = \cos\theta \sin\theta$

$T = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$



b. Le cercle a pour rayon 1, S + T est l'aire du secteur angulaire OAB donc son aire est $2\theta \times \frac{1}{2} = \theta$.

$S = (S + T) - T$ donc $S = \theta - \cos\theta \sin\theta$

$S = \theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta)$

c. $S = \theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta) = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha$ et $T = \frac{1}{2}\sin(2\theta) = \frac{1}{2}\sin\alpha$

$S = T \Leftrightarrow \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha = \frac{1}{2}\sin\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{2}\alpha - \sin\alpha = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$

$\theta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et $\alpha = 2\theta$ donc $\alpha \in]0;\pi[$

$f(x) = 0$ admet sur $[0;\pi]$ deux solutions : 0 et x_0, $\alpha \in]0;\pi[$ donc $\alpha = x_0$ donc $\theta = \frac{1}{2}x_0$.