a et b sont deux suites définies par a_0, b_0 et pour tout entier naturel n, $a_n = \frac{1}{5}(3\,a_n + 2\,b_n)$ et $b_n = \frac{1}{5}(2\,a_n + 3\,b_n)$.

a. u est la suite de terme général $u_n = a_n + b_n$. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Que peut-on dire de la suite u ?

b. v est la suite de terme général $v_n = a_n - b_n$. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

c. Exprimer a_n et b_n en fonction de n.

d. Les suites a et b sont-elles des suites adjacentes ?

CORRECTION

1. *a.* $u_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}$ donc $u_{n+1} = \frac{1}{5}(3\,a_n + 2\,b_n) + \frac{1}{5}(2\,a_n + 3\,b_n) = a_n + b_n$

$u_{n+1} = u_n$ donc la suite (u_n) est constante et $u_n = u_0$ soit $u_n = a_0 + b_0$

b. $v_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1}$ donc $v_{n+1} = \frac{1}{5}(3\,a_n + 2\,b_n) - \frac{1}{5}(2\,a_n + 3\,b_n)$

$v_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n - b_n)$ soit $v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$ de premier terme $u_0 = a_0 - b_0$

donc $v_n = q_n\,v_0 = 0{,}2^n\,(a_0 - b_0)$

c. $\begin{cases} u_n = a_n + b_n \\ v_n = a_n - b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,a_n = u_n + v_n \\ 2\,b_n = u_n - v_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{2}[a_0 + b_0 + 0{,}2^n\,(a_0 - b_0)] \\ b_n = \frac{1}{2}[a_0 + b_0 - 0{,}2^n\,(a_0 - b_0)] \end{cases}$

d. $v_n = a_n - b_n = 0{,}2^n\,(a_0 - b_0)$ or $-1 < 0{,}2 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}2^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n - b_n = 0$

Sens de variation des suites (a_n) et (b_n) :

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}[0{,}2^n\,(a_0 - b_0) - 0{,}2^{n+1}\,(a_0 - b_0)]$

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} \times 0{,}2^n\,(a_0 - b_0)\,(1 - 0{,}2)$

$a_{n+1} - a_n = 0{,}2^n \times 0{,}4\,(a_0 - b_0)$

de même

$b_{n+1} - b_n = -0{,}2^n \times 0{,}4\,(a_0 - b_0)$

donc deux cas :

Si $a_0 - b_0 \geq 0$, alors pour tout n de $\mathbb{N}$: $a_{n+1} - a_n \geq 0$ et $b_{n+1} - b_n \leq 0$ donc (a_n) est croissante et (b_n) décroissante

Si $a_0 - b_0 < 0$, alors pour tout n de $\mathbb{N}$: $a_{n+1} - a_n < 0$ et $b_{n+1} - b_n > 0$ donc (a_n) est décroissante et (b_n) croissante

Dans tous les cas les suites (a_n) et (b_n) sont l'une croissante l'autre décroissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n - b_n = 0$ donc sont adjacentes.