1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a = 2n + 5$ et $b = n - 3$

a. Montrer que pour tout diviseur commun de a et b est un diviseur de 11

b. En déduire suivant les valeurs de n, les valeurs de d = PGCD(a ; b).

c. Montrer que les nombres $a = 2 \times 12^5 + 5$ et $b = 12^5 - 3$ sont premiers entre eux

2. *a.* Montrer, pour tout entier naturel n, $(n^2 + 3n + 2)$ est divisible par $n + 1$.

b. soit $A(n) = 3n^2 + 5n + 19$.

i. Montrer que : $A(n) = (n + 1)(3n + 2) + 17$ et que $A(n) = (n + 2)(3n - 1) + 21$

ii. En déduire, les valeurs de n pour que $A(n)$ soit divisible par $(n + 1)$ d'une part et par $(n + 2)$ d'autre part.

c. En déduire que pour tout entier naturel n, $A(n)$ n'est pas divisible par $(n^2 + 3n + 2)$.

3. On considère dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'équation (E): $3x - 5y = 1$

a. Vérifier que (7 ; 4) est une solution de (E).

b. Trouver alors tous les couples (x ; y) solutions de (E)

4. *a.* Montrer que pour tout entier naturel n,

$$n^5 + 1 = (n + 1)(n^4 - n^3 + n^2 - n + 1) \text{ et } n^5 - 1 = (n - 1)(n^4 + n^3 + n^2 + n + 1)$$

b. En déduire que $B(n) = n^{11} - n$ est divisible par 3

c. Déterminer le reste dans la division euclidienne par 33 du nombre $C(n) = n^{11} + 32n + 235$.

CORRECTION

1\. *a.* Eliminons n entre a et b, $a - 2b = 11$ donc tout diviseur commun de a et b est un diviseur de $a - 2b$ donc de 11

b. d = PGCD(a ; b) est un diviseur commun de a et b donc de 11

11 est un nombre premier donc soit $d = 1$ soit $d = 11$

Si $d = 11$, 11 divise b donc il existe un entier k tel que $n - 3 = 11k$ alors $n = 11k + 3$

$2n + 5 = 2(11k + 3) + 5 = 22k + 11 = 11(2k + 1)$ donc 11 divise a

Si $d = 11$ alors $n = 11k + 3$

Dans les autres cas, $n = 11k + r$ ($0 \le r < 11$ et $r \ne 3$) 11 ne divise pas b donc $d = 1$

c. Les nombres $a = 2 \times 12^5 + 5$ et $b = 12^5 - 3$ sont de la forme $2n + 5$ et $n - 3$ avec $n = 12^5$.

$12 \equiv 1$ modulo 11 donc $12^5 \equiv 1^5$ modulo 11 soit $12^5 \equiv 1$ modulo 11 donc 12^5 n'est pas de la forme $11k + 3$ donc a et b sont premiers entre eux

2\. *a.* $x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = -2$ alors $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$ donc $n^2 + 3n + 2 = (n + 1)(n + 2)$

Pour tout entier naturel n, $n + 1$ et $n + 2$ sont des entiers naturels donc $(n^2 + 3n + 2)$ est divisible par $n + 1$.

b. soit $A(n) = 3n^2 + 5n + 19$.

i. $(n + 1)(3n + 2) + 17 = 3n^2 + 2n + 3n + 2 + 17 = 3n^2 + 5n + 19 = A(n)$

$(n + 2)(3n - 1) + 21 = 3n^2 - n + 6n - 2 + 21 = 3n^2 + 5n + 19 = A(n)$

donc $A(n) = (n + 1)(3n + 2) + 17$ et $A(n) = (n + 2)(3n - 1) + 21$

ii. $(n + 1)$ divise $A(n)$ donc $(n + 1)$ divise $A(n) - (n + 1)(3n + 2)$

soit $(n + 1)$ divise 17, $n + 1$ est un entier naturel donc $n + 1 = 1$ ou $n + 1 = 17$ soit $n = 0$ ou $n = 16$

$(n + 2)$ divise $A(n)$ donc $(n + 2)$ divise $A(n) - (n + 2)(3n - 1)$

soit $(n + 2)$ divise 21, $n + 2$ est un entier naturel donc $n + 2 = 1$ ou $n + 2 = 3$ ou $n + 2 = 7$ ou $n + 2 = 21$

soit $n = -1$ (exclu $n \in \mathbb{N}$) ou $n = 1$ ou $n = 5$ ou $n = 19$

c. Si $A(n)$ est divisible par $(n^2 + 3n + 2)$, il est divisible par $(n + 1)$ et il est divisible par $n + 2$

Il est divisible par $n + 1$ donc $n = 0$ ou $n = 16$ et il est divisible par $n + 2$ donc $n = 1$ ou $n = 5$ ou $n = 19$

Il n'existe aucune valeur de n commune à ces deux conditions donc on ne peut pas avoir simultanément $A(n)$ divisible par $(n + 1)$ et par $(n + 2)$ donc pour tout entier naturel n, $A(n)$ n'est pas divisible par $(n^2 + 3n + 2)$.

3\. *a.* $3 \times 7 - 5 \times 4 = 21 - 20 = 1$ donc (7 ; 4) est une solution de (E).

b. $\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 3 \times 7 - 5 \times 4 = 1 \end{cases}$ donc par soustraction terme à terme $3(x - 7) - 5(y - 3) = 0$ soit $3(x - 7) = 5(y - 4)$

3 divise $5(y - 4)$ or 3 et 5 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 3 divise $y - 4$ donc il existe un entier naturel k tel que $y = 3k + 4$

En remplaçant : $3(x - 7) = 5 \times 3k$ donc $x - 7 = 5k$ soit $x = 5k + 7$

Vérification si $x = 5k + 7$ et $y = 3k + 3$ alors $3x - 5y = 3(5k + 7) - 5 \times (3k + 4) = 1$ donc les solutions de (E) sont les couples $(5k + 7 ; 3k + 4)$ avec $k \in \mathbb{N}$.

4\. *a.* $(n + 1)(n^4 - n^3 + n^2 - n + 1) = n^5 - n^4 + n^3 - n^2 + n + n^4 - n^3 + n^2 - n + 1 = n^5 + 1$

soit $n^5 + 1 = (n + 1)(n^4 - n^3 + n^2 - n + 1)$

$(n - 1)(n^4 + n^3 + n^2 + n + 1) = n^5 + n^4 + n^3 + n^2 + n - n^4 - n^3 - n^2 - n - 1 = n^5 - 1$

soit $n^5 - 1 = (n + 1)(n^4 + n^3 + n^2 + n + 1)$

b. $B(n) = n(n^{10} - 1) = n(n^5 - 1)(n^5 + 1)$
$B(n) = n(n + 1)(n - 1)(n^4 - n^3 + n^2 - n + 1)(n^4 + n^3 + n^2 + n + 1)$
$n - 1$, n et $n + 1$ sont trois entiers consécutifs donc l'un d'eux est divisible par 3 donc $B(n) = n^{11} - n$ est divisible par 3.

c. $C(n) = n^{11} - n + 33n + 33 \times 7 + 4 = n^{11} - n + 4 + 33(n + 7)$ donc le reste de la division euclidienne de $C(n)$ par 33 est le même que celui de la division euclidienne de $n^{11} - n + 4$ par 33
11 est un nombre premier donc, pour tout entier n, 11 divise $n^{11} - n$
11 et 3 sont deux nombres premiers entre eux, 11 et 3 divisent $n^{11} - n$ donc d'après le corollaire du théorème de Gauss, 3×11 divise $n^{11} - n$ donc il existe un entier q tel que $n^{11} - n = 11q$ donc $C(n) = 33 \times q + 4$
$0 \leq 4 < 33$ donc le reste dans la division euclidienne par 33 du nombre $C(n)$ est 4