Nouvelle Calédonie Mars 2016

Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

Une boite contient 200 médailles souvenir dont 50 sont argentées, les autres dorées.
Parmi les argentées 60 % représentent le château de Blois, 30 % le château de Langeais, les autres le château de Saumur.
Parmi les dorées 40 % représentent le château de Blois, les autres le château de Langeais.
On tire au hasard une médaille de la boite. Le tirage est considéré équiprobable et on note :

• A l'évènement « la médaille tirée est argentée » ;
• D l'évènement « la médaille tirée est dorée » ;
• B l'évènement « la médaille tirée représente le château de Blois » ;
• L l'évènement « la médaille tirée représente le château de Langeais » ;
• S l'évènement « la médaille tirée représente le château de Saumur ».

1. Dans cette question, on donnera les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.

1. *a*. Calculer la probabilité que la médaille tirée soit argentée et représente le château de Langeais.

1. *b*. Montrer que la probabilité que la médaille tirée représente le château de Langeais est égale à $\frac{21}{40}$.

1. *c*. Sachant que la médaille tirée représente le château de Langeais, quelle est la probabilité que celle-ci soit dorée ?

2. Sachant que la médaille tirée représente le château de Saumur, donner la probabilité que celle-ci soit argentée.

Partie B

Une médaille est dite conforme lorsque sa masse est comprise entre 9,9 et 10,1 grammes.
On dispose de deux machines M_1 et M_2 pour produire les médailles.

1. Après plusieurs séries de tests, on estime qu'une machine M_1 produit des médailles dont la masse X en grammes suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type 0,06.
On note C l'évènement « la médaille est conforme ».
Calculer la probabilité qu'une médaille produite par la machine M_1 ne soit pas conforme. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3} près.

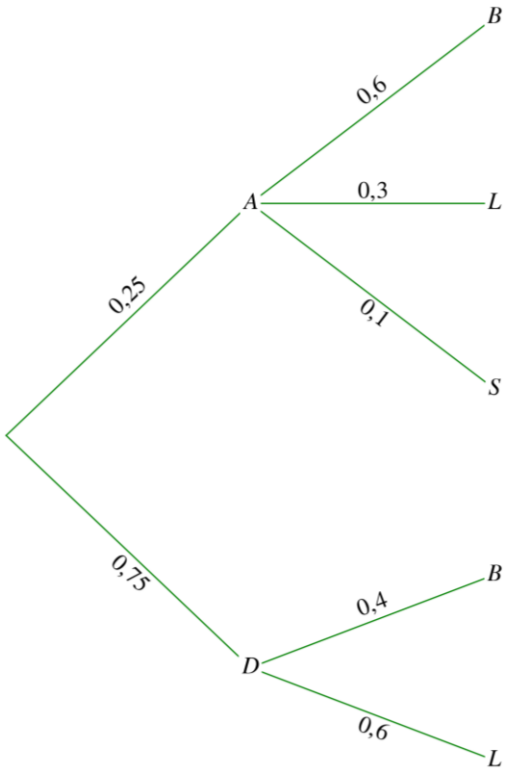
2. La proportion des médailles non conformes produites par la machine M_1 étant jugée trop importante, on utilise une machine M_2 qui produit des médailles dont la masse Y en grammes suit la loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type σ.

2. *a*. Soit Z la variable aléatoire égale à $\frac{Y-10}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par la variable Z ?

2. *b*. Sachant que cette machine produit 6 % de pièces non conformes, déterminer la valeur arrondie au millième de σ.

CORRECTION

Partie A



1. *a*. $p(A \cap L) = 0,25 \times 0,3 = \frac{3}{40}$

1. *b*. $p(L) = p(A \cap L) + p(B \cap L) = 0,25 \times 0,3 + 0,75 \times 0,6 = 0,525$

$p(L) = \frac{21}{40}$.

1. *c*. $p_L(D) = \frac{p(D \cap L)}{p(L)} = \frac{0,75 \times 0,6}{0,525} = \frac{\frac{9}{20}}{\frac{21}{40}} = \frac{18}{21} = \frac{6}{7}$

2. Les seules médailles représentant le château de Saumur sont argentées donc la probabilité que la médaille tirée soit argentée sachant qu'elle représente le château de Saumur est de 1.

Partie B

1. La probabilité qu'une médaille produite par la machine M_1 soit conforme est $p(9,9 \leq C \leq 10,1) \approx 0,904$ donc la probabilité qu'une médaille produite par la machine M_1 ne soit pas conforme est égale à $1 - p(C) \approx 0,096$

2. *a*. Z suit une loi normale centrée réduite

2. *b*. La probabilité qu'une médaille produite par la machine M_2 soit conforme est égale à 1 – 0,06 = 0,94 donc

$p(9,9 \leq C \leq 10,1) = p\left(\frac{9,9-10}{\sigma} \leq Z \leq \frac{10,1-10}{\sigma}\right) = 0,94$ soit $p\left(\frac{-0,1}{\sigma} \leq Z \leq \frac{0,1}{\sigma}\right) = 0,94$ donc $\frac{0,1}{\sigma} = 1,88$ soit $\frac{0,1}{1,88} = \sigma$

soit $\sigma \approx 0,053$