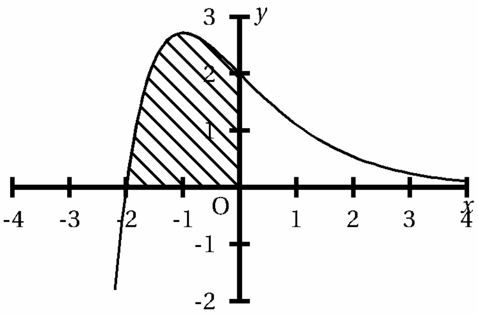
ASIE JUIN 2006
Partie C

1. On considère la suite d'intégrales (I_n) définie par :

$$I_0 = \int_{-2}^{0} e^{-x}\, dx \quad \text{et pour tout entier naturel } n \geq 1 \text{ par : } I_n = \int_{-2}^{0} x^n e^{-x}\, dx .$$

a. Calculer la valeur exacte de l'intégrale I_0.
b. En utilisant une intégration par parties, démontrer l'égalité : $I_{n+1} = (-2)^{n+1} e^2 + (n+1) I_n$
c. En déduire les valeurs exactes des intégrales I_1 et I_2.

2 Le graphique ci-dessous représente une courbe C_k qui est la représentation graphique d'une fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = (x+k)\, e^{-x}$.



a. À l'aide des renseignements donnés par le graphique, déterminer la valeur du nombre réel *k* correspondant.
b. Soit S l'aire de la partie hachurée (en unité d'aire) ; exprimer S en fonction de I_0 et I_1 et en déduire sa valeur exacte.

CORRECTION

1\. *a*. $I_0 = \left[-e^{-x}\right]_{-2}^{0} = e^2 - 1$

b. Soit $u'(x) = e^{-x}$ $\quad u(x) = -e^{-x}$
$v(x) = x^{n+1}$ $\quad v'(x) = (n+1)\, x^n$

$$I_{n+1} = \left[-x^{n+1} e^{-x}\right]_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0} -(n+1)x^n e^{-x}\, dx$$

$$I_{n+1} = (-2)^{n+1} e^2 + (n+1) \int_{-2}^{0} x^n e^{-x}\, dx$$

$$I_{n+1} = (-2)^{n+1} e^2 + (n+1)\, I_n$$

1\. *c*. Si $n = 0$, $I_1 = (-2)\, e^2 + I_0 = -e^2 - 1$
Si $n = 1$, $I_2 = (-2)^2 e^2 + 2\, I_1 = 2\, e^2 - 2$

2\. *a*. $f_k(x) = (x+k)\, e^{-x}$
D'après le graphique : $f_k(0) = 2$ donc $k = 2$

2\. *b*. f_k est positive sur $[-2 ; 0]$ donc $S = \int_{-2}^{0} f_k(x)\, dx$

$S = I_1 + 2\, I_0 = -e^2 - 1 + 2\,(e^2 - 1) = e^2 - 3$