Métropole & La Réunion septembre 2009

EXERCICE 1 (6 points) Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x^2 + 4)$.

PARTIE A

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle$[0 ; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

(a) Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

(b) Montrer que sur l'intervalle $[2 ; 3]$ l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera α.

Donner la valeur arrondie de α à 10^{-1}.

(c) Justifier que le nombre réel α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.

PARTIE B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = f(u_n)$.

La courbe C représentative de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = x$ sont tracées sur le graphique donné en annexe (à rendre avec la copie).

1. À partir de u_0, en utilisant la courbe C et la droite Δ, on a placé u_1 sur l'axe des abscisses. De la même manière, placer les termes u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.
2. Placer le point I de la courbe C qui a pour abscisse α.
3. (a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a $1 \leq u_n \leq \alpha$.

(b) Démontrer que la suite (u_n) converge.

(c) Déterminer sa limite.

EXERCICE 2 : (5 points) Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On désigne par P le plan d'équation $x + y - 1 = 0$ et par P′ le plan d'équation $y + z - 2 = 0$.

Justifier que les plans P et P′ sont sécants et vérifier que leur intersection est la droite D, dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$, où t désigne un nombre réel.

2. (a) Déterminer une équation du plan R passant par le point O et orthogonal à la droite D.

(b) Démontrer que le point I, intersection du plan R et de la droite D, a pour coordonnées $(0 ; 1 ; 1)$.

3. Soient A et B les points de coordonnées respectives $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ et $(1 ; 1 ; 0)$.

(a) Vérifier que les points A et B appartiennent au plan R.

(b) On appelle A’ et B’ les points symétriques respectifs des points A et B par rapport au point I.

Justifier que le quadrilatère ABA’ B’ est un losange.

(c) Vérifier que le point S de coordonnées $(2 ; -1 ; 3)$ appartient à la droite D.

(d) Calculer le volume de la pyramide SABA’ B’.

On rappelle que le volume V d'une pyramide de base d'aire b et de hauteur h est : $V = \frac{1}{3} b \times h$.

EXERCICE 3 : (4 points) Commun à tous les candidats

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels par $f(x) = e^x$.

On appelle C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit a un nombre réel. Démontrer que la tangente à la courbe C_f au point M d'abscisse a coupe l'axe des abscisses au point P d' abscisse $a - 1$.
2. Soit N le projeté orthogonal du point M sur l'axe des abscisses. Démontrer que $\overrightarrow{NP} = -\vec{i}$.

PARTIE B

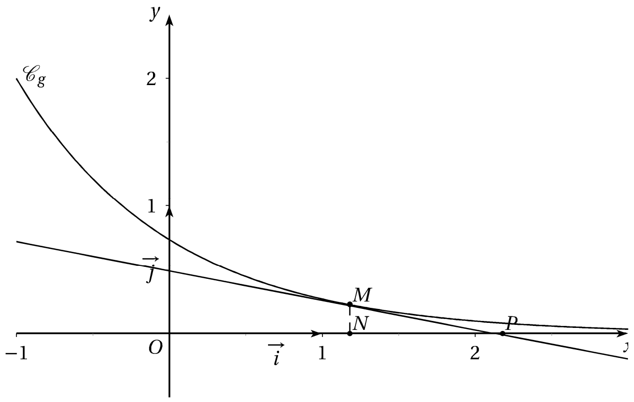
Soit g une fonction dérivable sur l'ensemble des nombres réels telle que $g'(x) \neq 0$ pour tout nombre réel x.

On appelle C_g la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit a un nombre réel. On considère le point M de la courbe C_g d'abscisse a et le point N projeté orthogonal du point M sur l'axe des abscisses.

Soit P le point d'intersection de la tangente T_a à la courbe C_g au point M avec l'axe des abscisses.

Le graphique ci-dessous illustre la situation de la partie B.



1. Démontrer que le point P a pour coordonnées $\left(a - \dfrac{g(a)}{g'(a)}\ ;\ 0\right)$.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Existe-t-il une fonction g vérifiant $g(0) = 2$ et $\overrightarrow{\mathrm{NP}} = \vec{i}$?

EXERCICE 4 : (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un réparateur de vélos a acheté 30 % de son stock de pneus à un premier fournisseur, 40 % à un deuxième et le reste à un troisième.
Le premier fournisseur produit 80 % de pneus sans défaut, le deuxième 95 % et le troisième 85 %.

1. Le réparateur prend au hasard un pneu de son stock.

(*a*) Construire un arbre de probabilité traduisant la situation, et montrer que la probabilité que ce pneu soit sans défaut est égale à 0,875.

(*b*) Sachant que le pneu choisi est sans défaut, quelle est la probabilité qu'il provienne du deuxième fournisseur ? On donnera la valeur arrondie du résultat à 10^{-3}.

2. Le réparateur choisit dix pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus est suffisamment important pour assimiler ce choix de dix pneus à un tirage avec remise de dix pneus.

Quelle est alors la probabilité qu'au plus un des pneus choisis présente un défaut ? On donnera la valeur arrondie à 10^{-3}.

3. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de kilomètres parcourus par un pneu, sans crevaison.

On fait l'hypothèse que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.
On rappelle que, pour tout nombre réel k positif :

$$P(X \leq k) = \int_0^k \lambda\, e^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x.$$

(*a*) Montrer que $P(500 \leq X \leq 1000) = e^{-500\lambda} - e^{-1000\lambda}$.

(*b*) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La probabilité que le pneu parcoure entre 500 et 1000 kilomètres sans crevaison étant égale à $\dfrac{1}{4}$, déterminer la valeur arrondie à 10^{-4} du paramètre λ.

EXERCICE 4 : (5 points)
Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. (*a*) Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2009 par 11.

(*b*) Déterminer le reste dans la division euclidienne de 2^{10} par 11.

(*c*) Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{2009} + 2009$ par 11.

2. On désigne par p un nombre entier naturel. On considère pour tout entier naturel non nul n le nombre $A_n = 2^n + p$.

On note d_n le PGCD de A_n et A_{n+1}.

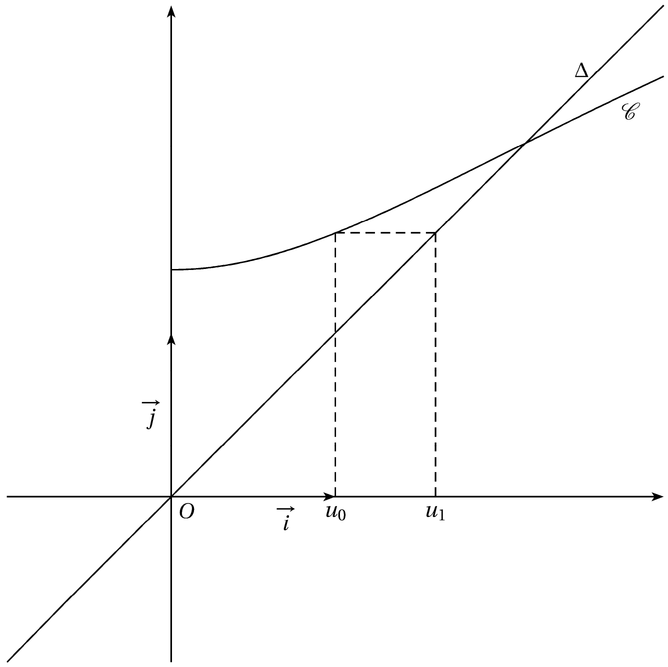
(*a*) Montrer que d_n divise 2^n.

(*b*) Déterminer la parité de A_n en fonction de celle de p. Justifier.

(*c*) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer la parité de d_n en fonction de celle de p.
En déduire le PGCD de $2^{2009} + 2009$ et $2^{2010} + 2009$.

ANNEXE DE L'EXERCICE 1



CORRECTION

EXERCICE 1 (6 points)

PARTIE A

1. $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+4}$ donc $f'(x) > 0$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et $f'(0) = 0$ donc f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

2. (*a*) $g'(x) = f'(x) - 1 = \dfrac{2x}{x^2+4} - 1 = -\dfrac{x^2-2x+4}{x^2+4}$

$x^2 - 2x + 4 > 0$ donc $g'(x) < 0$ donc g est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

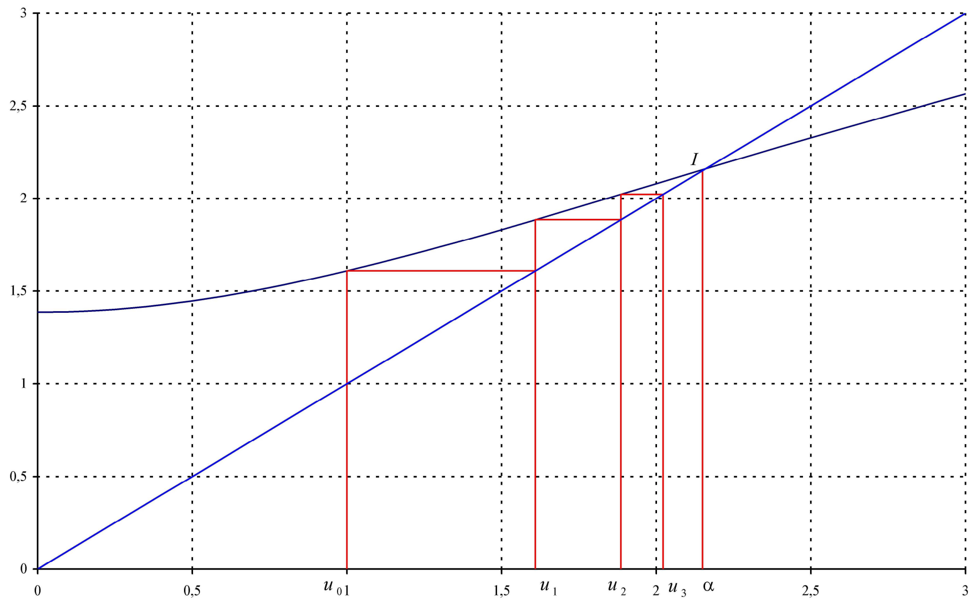
(*b*) $g(2) = \ln 8 - 2$ or $\ln 8 - 2 \approx 0{,}079$
et $g(3) = \ln 13 - 3 \approx -0{,}44$
g est définie continue, strictement décroissante sur $[2 ; 3]$
$0 \in [g(3) ; g(2)]$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2 ; 3]$.

$g(2{,}1) \approx 0{,}03$ et $g(2{,}2) \approx -0{,}02$ donc $2{,}1 < \alpha < 2{,}2$

(*c*) Résoudre $f(x) = x$ est équivalent à résoudre $g(x) = 0$
Sur $[0 ; 2]$ g est strictement décroissante donc $g(x) \geq g(2) > 0$ donc l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution sur $[0 ; 2]$
Sur $[3 ; +\infty[$ g est strictement décroissante
donc $0 > g(3) \geq g(x)$ donc l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution sur $[3 ; +\infty[$ donc l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution sur $[3 ; +\infty[$
le nombre réel α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.

PARTIE B

1. 2.



3. (*a*) $u_0 = 1$ donc $1 \leq u_0 \leq \alpha$ donc la propriété est vérifiée pour la plus petite valeur de n autorisée.
Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, si $1 \leq u_n \leq \alpha$ alors $1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$
f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ donc si $1 \leq u_n \leq \alpha$ alors $f(1) \leq f(u_n) \leq f(\alpha)$ or $f(1) \geq 1$ et $f(\alpha) = \alpha$
donc $1 \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

(*b*) g est strictement décroissante sur $[0 ; \alpha]$ et $g(\alpha) = 0$ donc g est positive sur $[0 ; \alpha]$.
$1 \leq u_n \leq \alpha$ donc $g(u_n) \geq 0$ donc $f(u_n) - u_n \geq 0$ soit $u_{n+1} \geq u_n$
La suite (u_n) est croissante, majorée par α donc converge.

(*c*) (u_n) est une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, f est continue sur $[0 ; +\infty[$ et pour tout entier naturel $u_n \in [0 ; +\infty[$, d'autre part (u_n) converge donc sa limite est solution de $f(x) = x$ donc est égale à α.

EXERCICE 2 : (5 points) Commun à tous les candidats

1. Le plan P admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n_P}$ (1 ; 1 ; 0). Le plan P' admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n_{P'}}$ (0 ; 1 ; 1)

$\overrightarrow{n_P}$ et $\overrightarrow{n_{P'}}$ ne sont pas colinéaires donc les plans P et P′ sont sécants

Le point G d'ordonnée 0 de leur intersection a des coordonnées qui vérifient $\begin{cases} x+y-1=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$ donc $x = 1$ et $z = 2$ donc G(1 ; 0 ; 2)

Le point H de cote 0 de leur intersection a des coordonnées qui vérifient $\begin{cases} x+y-1=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$ donc $x = -1$ et $y = 2$ donc H(– 1 ; 2 ; 0)

$\overrightarrow{GH}$ est un vecteur directeur de la droite intersection des plans P et P'. $\overrightarrow{GH}$ a pour coordonnées (– 2 ; 2 ; – 2)

donc $\vec{u}$ (– 1 ; 1 ; – 1) est un vecteur directeur de la droite intersection des plans P et P'.

M $\in$ D $\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$ $\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases} x-1=-t \\ y=t \\ z-2=-t \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ il existe un réel t tel que $\begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=2-t \end{cases}$

l'intersection des plans P et P' est la droite D, dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=2-t \end{cases}$, où t désigne un nombre réel.

2. (*a*) $\vec{u}$ (– 1 ; 1 ; 1) est un vecteur directeur de la droite D donc est un vecteur normal à R

Une équation de R est donc $-x+y-z=0$ (la constante est nulle puisque ce plan passe par O) ou encore $x-y+z=0$

(*b*) I appartient à D donc il existe un réel t tel que $\begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=2-t \end{cases}$. I appartient à R donc ses coordonnées vérifient $x-y+z=0$

soit $(1-t)-t+(2-t)=0$ donc $t = 1$ donc I a pour coordonnées (0 ; 1 ; 1)

3. (*a*) Une équation de R est $x-y+z=0$ or $-\frac{1}{2}+0-\frac{1}{2}=0$ donc A $\in$ R de même puisque $1-1+0=0$ alors B $\in$ R

(*b*) I est le milieu des diagonales [AA'] et [BB'] du quadrilatère donc ABA’ B’ est un parallélogramme.

Il suffit donc de montrer que deux consécutifs ont la même longueur ou que les diagonales sont perpendiculaires.

I est le milieu de [AA'] donc $x_I = \frac{1}{2}(x_A + x_{A'})$ donc

$x_{A'} = 2x_I - x_A$ de même pour les autres coordonnées donc A' a pour coordonnées (0,5 ; 2 ; 1,5)

$$AB^2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{2}$$

$BA'^2 = \left(1-\frac{1}{2}\right)^2 + (1-2)^2 + \left(0-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{2}$ donc BA' = AB donc le quadrilatère ABA’ B’ est un losange.

(*c*) Il existe un réel $t = -1$ tel que $\begin{cases} x=1-t=2 \\ y=t=-1 \\ z=2-t=3 \end{cases}$ donc le point S de coordonnées (2 ; − 1 ; 3) appartient à la droite D.

(*d*) Le losange ABA'B' a pour aire $4 \times \mathscr{A}_{IAB}$ or IAB est un triangle rectangle en I, IA = $\frac{1}{2}$AA'

or $AA'^2 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2 + (0-2)^2 + \left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 = 6$ donc IA' = $\frac{\sqrt{6}}{2}$ et IB = $\sqrt{2}$ donc $\mathscr{A}_{IAB} = \frac{1}{2}\text{IA} \times \text{IB}$

$$\mathscr{A}_{IAB} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Le losange ABA'B' a pour aire $b = 2\sqrt{3}$

Le plan R est orthogonal à D et S est un point de D de projection orthogonale I (point d'intersection de R et de D) donc la distance de S au plan (IAB) est SI

$SI^2 = (2-0)^2 + (-1-1)^2 + (3-1)^2 = 12$

SI = $h = 2\sqrt{3}$

le volume de la pyramide SABA’ B’ est égal à $\frac{1}{3}\,b \times h$, donc V = $\frac{1}{3} \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}$ soit V = 4

EXERCICE 3 : (4 points) Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. La tangente à la courbe C_f au point M d'abscisse a a une équation de la forme : $y = f'(a)\, x + b$ soit $y = e^{a}\, x + b$
Cette droite passe par le points A(a ; e^{a}) donc $e^{a} = a\, e^{a} + b$
soit $b = e^{a} - a\, e^{a}$
La tangente à la courbe C_f au point M d'abscisse a a pour équation $y = e^{a}\, x + e^{a} - a\, e^{a}$ soit $y = e^{a}\,(x + 1 - a)$
Cette droite coupe l'axe des abscisses en un point P tel que $y = 0$ donc tel que $e^{a}\,(x + 1 - a) = 0$
donc (puisque $e^{a} > 0$) quand $x = a - 1$
La tangente à la courbe C_f au point M d'abscisse a coupe l'axe des abscisses au point P d' abscisse $a - 1$.

2. N a pour coordonnées (a ; 0) et P ($a - 1$; 0) donc $\overrightarrow{NP} = -\vec{i}$

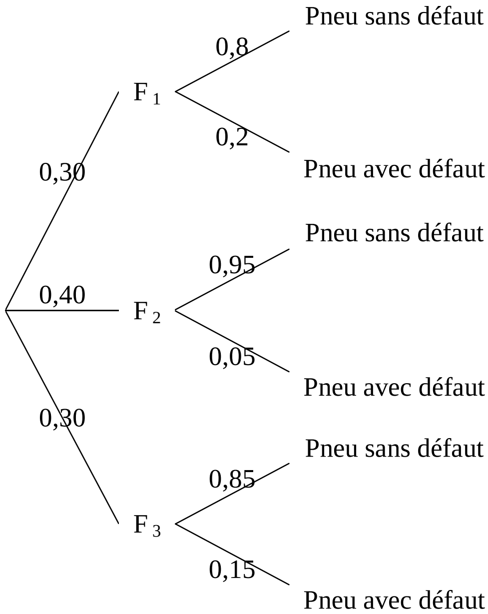
PARTIE B

1. la tangente T_a à la courbe C_g au point M d'abscisse a a pour équation $y = g'(a)\,(x - a) + g(a)$
Cette droite coupe l'axe des abscisses en P tel que $y_P = 0$
donc $g'(a)\,(x - a) + g(a) = 0$ or $g'(x) \neq 0$ pour tout nombre réel x donc $g'(a) \neq 0$ donc $x - a = -\dfrac{g(a)}{g'(a)}$ soit $x = a - \dfrac{g(a)}{g'(a)}$
Le point P a pour coordonnées $\left(a - \dfrac{g(a)}{g'(a)}\,;0\right)$.

2. Existe-t-il une fonction g vérifiant $g(0) = 2$ donc P a pour coordonnées $\left(a - \dfrac{g(a)}{g'(a)}\,;0\right)$ donc $\overrightarrow{NP} = -\dfrac{g(a)}{g'(a)}\vec{i}$
Il faut donc que $-\dfrac{g(a)}{g'(a)} = 1$ soit $g'(a) = -2\, g(a)$
ceci doit être vrai pour tout a réel
g vérifie l'équation différentielle $y' = -2\,y$ donc $g(x) = k\, e^{-2x}$ $g(0) = 2$ donc $k = 2$ donc $g(x) = 2\, e^{-2x}$.

EXERCICE 4 : (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Le réparateur prend au hasard un pneu de son stock.



(*a*) la probabilité que ce pneu soit sans défaut est égale à $P(S) = P(F_1 \cap S) + P(F_2 \cap S) + P(F_3 \cap S)$

$P(S) = 0,3 \times 0,8 + 0,4 \times 0,95 + 0,3 \times 0,85 = 0,875$.

(*b*) $P(F_2 / S) = \dfrac{P(F_2 \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,40 \times 0,95}{0,875} = 0,434$

2. On a une succession de 10 expériences aléatoires, identiques et indépendantes. Chacune d'elles *a* deux issues

Réussite : le pneu choisi ne présente pas de défaut ($p = 0,125$)

Echec le pneu choisi présente un défaut ($q = 1 - p = 0,875$)

donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de pneus sans défaut suit une loi binomiale de paramètres (10 ; 0,125)

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,263075576 + 0,375822252$

$P(X \leq 1) = 0,639$

3. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de kilomètres parcourus par un pneu, sans crevaison.

(*a*) $P(X \leq k) = \int_0^k \lambda e^{-\lambda x}\, dx = 1 - e^{-\lambda x}$

$P(500 \leq X \leq 1000) = P(X \leq 1000) - P(X \leq 500)$

$P(500 \leq X \leq 1000) = 1 - e^{-1000\lambda} - (1 - e^{-500\lambda})$

$P(500 \leq X \leq 1000) = e^{-500\lambda} - e^{-1000\lambda}$.

(*b*) La probabilité que le pneu parcoure entre 500 et 1000 kilomètres sans crevaison étant égale à $\frac{1}{4}$, déterminer la valeur arrondie à 10^{-4} du paramètre λ.

$e^{-500\lambda} - e^{-1000\lambda} = 0,25$

Soit $x = e^{-500\lambda}$ alors $e^{-500\lambda} - e^{-1000\lambda} = x - x^2$

donc $e^{-500\lambda} - e^{-1000\lambda} = 0,25$ devient $x^2 - x + 0,25 = 0$

$x = 0,5$ donc $e^{-500\lambda} = 0,5$

$-500\lambda = \ln 0,5 \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{\ln 0,5}{500} = \dfrac{\ln 2}{500}$

$\lambda \approx 0,0014$

EXERCICE 4 : (5 points) Pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. (*a*) $2009 = 11 \times 182 + 7$ donc le reste dans la division euclidienne de 2009 par 11 est 7.

(*b*) deux solutions sont possibles :
Première solution :
$2^4 = 16$ donc $2^4 \equiv 5$ (11)
donc $(2^4)^2 \equiv 5^2$ (11) soit $2^8 \equiv 3$ (11)
$2^{10} = 2^8 \times 2^2$ donc $2^{10} \equiv 3 \times 4$ (11) soit $2^{10} \equiv 1$ (11)

Autre solution plus courte ;

Petit théorème de Fermat : Soit a un entier relatif et p un nombre premier. Si p ne divise pas a alors $a^{p-1} \equiv 1 \quad [p]$

11 est un nombre premier et 11 ne divise pas 2 donc d'après le petit théorème de Fermat : $2^{11-1} \equiv 1$ [11]

(*c*) Déterminer le reste dans la division euclidienne de $2^{2009} + 2009$ par 11.
$2^{2009} = 2^{2000} \times 2^9 = (2^{10})^{200} \times 2^9$ donc $2^{2009} \equiv 2^9$ (11)
or $2^8 \equiv 3$ (11) donc $2^9 \equiv 3 \times 2$ (11) soit $2^9 \equiv 6$ (11)
$2^{2009} \equiv 6$ (11)
$2009 \equiv 7$ (11) donc $2^{2009} + 2009 \equiv 13$ (11)
$2^{2009} + 2009 \equiv 2$ (11)
Le reste dans la division euclidienne de $2^{2009} + 2009$ par 11 est 2.

2. (*a*) $A_n = 2^n + p$ et $A_{n+1} = 2^{n+1} + p = 2 \times 2^n + p$
$A_{n+1} = 2^n + 2^n + p$ donc $A_{n+1} - A_n = 2^n$
d_n est le PGCD de A_n et A_{n+1} donc d_n est le PGCD de A_n et $A_{n+1} - A_n$ donc d_n est le PGCD de A_n et 2^n
d_n divise 2^n.

(*b*) $n \geq 1$ donc 2^n est un multiple de 2 donc un nombre pair
donc $2^n + p$ a la même parité que p

(*c*) d_n est le PGCD de A_n et 2^n donc d_n est le PGCD de $A_n - 2^n$ et 2^n soit d_n est le PGCD de p et 2^n soit d_n divise p
d_n divise un nombre pair 2^n donc d_n est de la forme 2^q
si p est pair, alors d_n est pair et $d_n \geq 2$.
si p est impair, et d_n est de la forme 2^q et divise un nombre impair p donc $d_n = 1$
2009 est un nombre impair donc
PGCD $(2^{2009} + 2009 ; 2^{2009+1} + 2009) = 1$
soit PGCD $(2^{2009} + 2009 ; 2^{2010} + 2009) = 1$