ENONCE

Polynésie Septembre 2001

Pour tout naturel $n > 1$ on pose : $I_n = \dfrac{1}{2^{n+1}\, n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \, e^{\frac{t}{2}} \, dt$

1. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1.

2. Démontrer que pour tout naturel $n > 1$ on a : $I_{n+1} - I_n = -\dfrac{2}{2^{n+1}\,(n+1)!}$

3. En déduire par récurrence que pour tout naturel $n > 1$ on a : $\sqrt{e} = 1 + \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{1!} + ... + \dfrac{1}{2^n}.\dfrac{1}{n!} + I_n$

4. Montrer que l'on peut trouver une constante A telle que : $0 \le I_n \le \dfrac{1}{2^n\, n!} A$

On pourra déterminer A en majorant la fonction : $t \to (1-t)^n \, e^{\frac{t}{2}}$ sur l'intervalle [0 ; 1]

En déduire la limite quand n tend vers l'infini de : $u_n = 1 + \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{1!} + ... + \dfrac{1}{2^n}.\dfrac{1}{n!}$.

CORRECTION

1. $I_1 = \dfrac{1}{2^2}\displaystyle\int_0^1 (1-t)\, e^{\frac{t}{2}}\, dt$

donc $4\, I_1 = \displaystyle\int_0^1 (1-t)\, e^{\frac{t}{2}}\, dt$

Soit $u'(t) = e^{\frac{t}{2}}$ alors $u(t) = 2\, e^{\frac{t}{2}}$
$v(t) = 1 - t$ alors $v'(t) = -1$

donc $4\, I_1 = \left[\, 2\,(1-t)\, e^{\frac{t}{2}} \,\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 -2\, e^{\frac{t}{2}}\, dt$

$4\, I_1 = -2 + 2 \displaystyle\int_0^1 e^{\frac{t}{2}}\, dt$

$4\, I_1 = -2 + 2 \left[\, 2\, e^{\frac{t}{2}} \,\right]_0^1$

$4\, I_1 = -2 + 2\,(2\, e^{\frac{1}{2}} - 2)$

$4\, I_1 = -2 + 4\, e^{\frac{1}{2}} - 4 = -6 + 4\sqrt{e}$

donc $I_1 = -\dfrac{3}{2} + \sqrt{e}$

2. On refait une intégration par parties :

$I_{n+1} = \dfrac{1}{2^{(n+1)+1}\,(n+1)!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{n+1}\, e^{\frac{t}{2}}\, dt$ donc $2^{n+2}\,(n+1)!\, I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^{n+1}\, e^{\frac{t}{2}}\, dt$

Soit $u'(t) = e^{\frac{t}{2}}$ alors $u(t) = 2\, e^{\frac{t}{2}}$
$v(t) = (1-t)^{n+1}$ alors $v'(t) = -(n+1)\,(1-t)^n$

donc $2^{n+2}\,(n+1)!\, I_{n+1} = \left[\, 2\,(1-t)^{n+1}\, e^{\frac{t}{2}} \,\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 -2\,(n+1)\,(1-t)^n\, e^{\frac{t}{2}}\, dt$

$2^{n+2}\,(n+1)!\, I_{n+1} = -2 + 2\,(n+1)\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\, e^{\frac{t}{2}}\, dt$

$I_{n+1} = -\dfrac{2}{2^{n+1}\,(n+1)!} + \dfrac{2\,(n+1)}{2^{n+2}\,(n+1)!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\, e^{\frac{t}{2}}\, dt$

$I_{n+1} = -\dfrac{2}{2^{n+1}\,(n+1)!} + \dfrac{1}{2^{n+1}\, n!}\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\, e^{\frac{t}{2}}\, dt$

$I_{n+1} = -\dfrac{2}{2^{n+1}\,(n+1)!} + I_n$

3. $\quad I_1 = -\frac{3}{2} + \sqrt{e} \Leftrightarrow \sqrt{e} = \frac{3}{2} + I_1 \Leftrightarrow \sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2} + I_1 \Leftrightarrow \sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2}.\frac{1}{1!} + I_1$

La propriété est donc vraie pour $n = 1$

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, la propriété est héréditaire :

Si $\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2}.\frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{2^n}.\frac{1}{n!} + I_n$ montrons qu'alors : $\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2}.\frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{2^n}.\frac{1}{n!} + \frac{2}{2^{n+1}(n+1)!} + I_{n+1}$

or $I_{n+1} = -\frac{2}{2^{n+1}(n+1)!} + I_n \Leftrightarrow I_n = \frac{2}{2^{n+1}(n+1)!} + I_{n+1}$

or $\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2}.\frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{2^n}.\frac{1}{n!} + I_n$

donc $\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2}.\frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{2^n}.\frac{1}{n!} + \frac{2}{2^{n+1}(n+1)!} + I_{n+1}$

La propriété est vraie au rang $n + 1$ donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

4. $\quad 0 \leq t \leq 1$ et la fonction $t \to e^{\frac{t}{2}}$ est croissante sur $\mathbb{R}$, donc $0 \leq e^{\frac{t}{2}} \leq \sqrt{e}$

$0 \leq 1 - t \leq 1$ donc $0 \leq (1 - t)^n \leq 1$

donc $0 \leq (1 - t)^n e^{\frac{t}{2}} \leq \sqrt{e}$

La fonction $t \to (1 - t)^n e^{\frac{t}{2}}$ est définie continue sur $[0 ; 1]$, $0 \leq 1$ et $0 \leq (1 - t)^n e^{\frac{t}{2}} \leq \sqrt{e}$

donc $0 \leq \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} \, dt \leq \int_0^1 \sqrt{e} \, dt$

soit $0 \leq \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} \, dt \leq \sqrt{e}$

donc $0 \leq \frac{1}{2^{n+1} n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} \, dt \leq \frac{1}{2^{n+1} n!} \sqrt{e}$

$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n n!} . \frac{\sqrt{e}}{2}$ donc $A = \frac{\sqrt{e}}{2}$

$2^n . n! > n$ (car $2^n > 1$ et $n! > n$) donc $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n} . \frac{\sqrt{e}}{2}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} . \frac{\sqrt{e}}{2} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{2}.\frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{2^n}.\frac{1}{n!} + I_n$

$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2}.\frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{2^n}.\frac{1}{n!} = \sqrt{e} - I_n \Leftrightarrow u_n = \sqrt{e} - I_n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{e}$.