Solution de l'exercice 6

<u>Enoncé</u>

Soit, dans le vide, l'onde électromagnétique définie par le champ électrique suivant :

$$\vec{E} = C.\sin(\alpha x)e^{j(\omega t - \beta z)}\vec{e}_y \qquad \alpha, \beta \text{ réels positifs}$$

1. Déterminer le champ $\vec{H}$ de cette onde.
2. Trouver la condition d'existence de cette onde.
3. Déterminer les composantes du vecteur de Poynting complexe. Comment peut-on caractériser cette onde ?

<u>Solution</u>

Rappel des équations de Maxwell :

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 0 \quad (1) \qquad \vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \quad (2) \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3) \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

Et la relation entre $\vec{H}$ et $\vec{B}$ dans le vide : $\vec{B} = \mu_0\vec{H} \quad (5)$

1. Pour déterminer $\vec{H}$, on calcule le rotationnel de $\vec{E}$ et on utilise (3) :
$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)\wedge(0, C\sin(\alpha x)e^{j(\omega t - \beta z)}, 0) = C(j\beta\sin(\alpha x), 0, \alpha\cos(\alpha x))e^{j(\omega t - \beta z)}$ où on a utilisé la notation condensée : $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$

En intégrant le vecteur obtenu par rapport au temps et en tenant compte de (3), on trouve :

$$\boxed{\vec{H} = \frac{1}{\omega\mu_0}Ce^{j(\omega t - \beta z)}(-\beta\sin(\alpha x)\vec{e}_x + j\alpha\cos(\alpha x)\vec{e}_z)}$$

$\vec{H}$ est donc situé dans le plan (xOz)

2. IL faut maintenant écrire que $\boldsymbol{H}$ vérifie l'équation (4)

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{H} = \frac{C}{\omega\mu_0}(\partial_x, \partial_y, \partial_z)\wedge(-\beta\sin(\alpha x)e^{j(\omega t - \beta z)}, 0, j\alpha\cos(\alpha x)e^{j(\omega t - \beta z)}) = j\frac{C}{\omega\mu_0}\sin(\alpha x)e^{j(\omega t - \beta z)}(\alpha^2 + \beta^2)\vec{e}_y$$

En portant dans (4), on trouve : $\alpha^2 + \beta^2 = \varepsilon_0\mu_0\omega^2 \quad (6)$

Or on sait que $\varepsilon_0\mu_0 c^2 = 1$ où *c* est la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide. Cette condition peut donc s'écrire : $\boxed{\alpha^2 + \beta^2 = (\frac{\omega}{c})^2}$

3. Le vecteur de Poynting est donné, en notation complexe, par : $\vec{P} = \frac{1}{2}\vec{E}\wedge\vec{H}^{¿}$ où $\vec{H}^{¿}$ est le complexe conjugué de $\vec{H}$ (remplacer *j* par –*j*).

$$2\vec{P} = -\frac{jC^2}{\omega\mu_0}\sin^2(\alpha x)(0,1,0)\wedge(\beta, 0, \alpha) = \frac{C^2}{\omega\mu_0}\sin^2(\alpha x)(\alpha, 0, -\beta)$$

donc

$$\boxed{\vec{P} = \frac{C^2}{2\omega\mu_0}\sin(\alpha x)(-j\alpha\cos(\alpha x)\vec{e}_x + \beta\sin(\alpha x)\vec{e}_z)}$$

Ce vecteur permet de calculer la puissance transportée par l'onde

Pour caractériser l'onde, il suffit d'écrire l'expression de $\boldsymbol{E}$ sous la forme suivante :

$$\vec{E} = C\frac{(e^{j\alpha x} - e^{-j\alpha x})}{2j}e^{j(\omega t - \beta z)} = C'(e^{j[\omega t - (\beta z - \alpha x)]} - e^{j[\omega t - (\alpha x + \beta z)]})$$

L'onde n'a pas une direction de propagation fixe, ce n'est pas une onde plane mais c'est la superposition de deux ondes planes, de même amplitude, l'une dans la direction $(\alpha, 0, \beta)$ et l'autre dans la direction $(-\alpha, 0, \beta)$, réflexion de la première sur le plan yoz. Lors de cette réflexion le champ électrique change de sens.