

Soit $x^2 - 7y^2 = 1$ où x et y sont des entiers naturels.

1. Premier algorithme

- a. Exprimer x en fonction de y .
- b. Ecrire un algorithme qui pour y entier de 0 à 1000 calcule x ; teste s'il est entier, et affiche les couples de solutions.
- c. Le programmer sur votre calculatrice ou sur Algotbox et donner les solutions.

2. Second algorithme

- a. Montrer que si le couple $(x; y)$ est une solution de l'équation alors $(x'; y')$ tel que :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 21 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

est aussi solution de l'équation.

- b. En déduire un algorithme qui à partir de la solution triviale (1 ; 0), donne de proche en proche 9 autres solutions.
- c. Le programmer et donner ces solutions.

CORRECTION

- 1. a. $x^2 - 7y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 + 7y^2$ or x est un entier naturel donc $x \geq 0$ donc $x = \sqrt{1 + 7y^2}$.

- b. En langage naturel

Variables	x, y sont des nombres
Initialisation	Attribuer à y la valeur 0
Traitement	Tant que $x \leq 1000$ x prend la valeur $\sqrt{1 + 7y^2}$ Si $x = E(x)$ Afficher x Afficher y Fin Si y prend la valeur $y + 1$ Fin Tant Que

Avec AlgoBox

```

1  VARIABLES
2  x EST_DU_TYPE NOMBRE
3  y EST_DU_TYPE NOMBRE
4  DEBUT_ALGORITHME
5  y PREND_LA_VALEUR 0
6  x PREND_LA_VALEUR 1
7  TANT_QUE (x<=1000) FAIRE
8  DEBUT_TANT_QUE
9  x PREND_LA_VALEUR sqrt(1+7*y*y)
10 SI (floor(x)==x) ALORS
11 DEBUT_SI
12 AFFICHER "("
13 AFFICHER x
14 AFFICHER " , "
15 AFFICHER y
16 AFFICHER ")"
17 FIN_SI
18 y PREND_LA_VALEUR y+1
19 FIN_TANT_QUE
20 FIN_ALGORITHME
    
```

- c. Les solutions sont (1 ; 0), (8 ; 3), (48 ; 127)

```

***Algorithme lancé***
( 1 , 0 )
( 8 , 3 )
( 127 , 48 )

***Algorithme terminé***
    
```

2. a. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 21 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ donc $\begin{cases} x' = 8x + 21y \\ y' = 3x + 8y \end{cases}$

$$\begin{cases} x'^2 = 64x^2 + 336xy + 441y^2 \\ y'^2 = 9x^2 + 48xy + 64y^2 \end{cases} \text{ donc}$$

$$x'^2 - 7y'^2 = 64x^2 + 336xy + 441y^2 - 63x^2 - 336xy - 448y^2$$

$x'^2 - 7y'^2 = x^2 - 7y^2$ donc si le couple $(x; y)$ est une solution de l'équation alors $x^2 - 7y^2 = 1$

donc $x'^2 - 7y'^2 = 1$ donc $(x'; y')$ est aussi solution de l'équation.

- b. En langage naturel

Variables	x, y, z sont des nombres
Initialisation	Attribuer à x la valeur 1 Attribuer à y la valeur 0
Traitement	Pour k variant de 1 à 9 z prend la valeur x x prend la valeur $8z + 21y$ y prend la valeur $3z + 8y$ Afficher x Afficher y Fin Pour

Avec AlgoBox

```

1  VARIABLES
2  k EST_DU_TYPE NOMBRE
3  x EST_DU_TYPE NOMBRE
4  y EST_DU_TYPE NOMBRE
5  z EST_DU_TYPE NOMBRE
6  DEBUT_ALGORITHME
7  k PREND_LA_VALEUR 0
8  x PREND_LA_VALEUR 1
9  y PREND_LA_VALEUR 0
10 AFFICHER "("
11 AFFICHER x
12 AFFICHER " ; "
13 AFFICHER y
14 AFFICHER ")"
15 POUR k ALLANT_DE 0 A 7
16 DEBUT_POUR
17 z PREND_LA_VALEUR x
18 x PREND_LA_VALEUR 8*z+21*y
19 y PREND_LA_VALEUR 3*z+8*y
20 AFFICHER "("
21 AFFICHER x
22 AFFICHER " ; "
23 AFFICHER y
24 AFFICHER ")"
25 FIN_POUR
26 FIN_ALGORITHME
    
```

- c. (1 ; 0); (8 ; 3); (127 ; 48); (2024 ; 765); (32257 ; 12192); (514088 ; 194307) (8193151 ; 3096720); (130576328 ; 49353213) (2081028097 ; 786554688)

```

***Algorithme lancé***
( 1 ; 0 )
( 8 ; 3 )
( 127 ; 48 )
( 2024 ; 765 )
( 32257 ; 12192 )
( 514088 ; 194307 )
( 8193151 ; 3096720 )
( 1.3057633e+8 ; 49353213 )
( 2.0810281e+9 ; 7.8655469e+8 )

***Algorithme terminé***
    
```