u est la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout nombre entier naturel } n : u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + n - 2.$$

Pour tout nombre entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3 puis S_0, S_1, S_2 et S_3.

2. *a*. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 4$; $u_n > 0$

b. En déduire la limite de la suite u.

3. v est la suite définie pour tout nombre entier naturel n, par $v_n = -2 u_n + 3n - \frac{21}{2}$.

a. Démontrer que v est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

b. En déduire que pour tout nombre entier naturel n : $u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2} n - \frac{21}{4}$.

c. Exprimer S_n en fonction de n. Etudier la limite de la suite (S_n).

CORRECTION

1.

n	0	1	2	3	4
u_n	1	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{14}{9}$	$-\frac{14}{27}$	$\frac{67}{81}$
S_n	1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{20}{9}$	$-\frac{74}{27}$	$\frac{155}{81}$

2. *a*. Initialisation : $u_4 > 0$ donc la propriété est vérifiée pour $n = 4$

Hérédité : Montrons que pour tout entier naturel $n \geq 4$; si $u_n > 0$ alors $u_{n+1} > 0$

$u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + n - 2$, $n \geq 4$ donc $n - 2 \geq 2 > 0$ de plus $u_n > 0$ donc u_{n+1} est la somme de deux expressions strictement positives $\frac{1}{3} u_n$ et $n - 2$, donc $u_{n+1} > 0$

La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel $n \geq 4$; $u_n > 0$.

b. pour tout entier naturel $n \geq 4$; $u_n > 0$ donc $u_{n+1} > n - 2$.

$\lim_{n \to +\infty} n - 2 = +\infty$ donc d'après les théorèmes de comparaison, $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = +\infty$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3. *a*. $v_{n+1} = -2 u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2}$.

$v_{n+1} = -2\left(\frac{1}{3} u_n + n - 2\right) + 3n + 3 - \frac{21}{2}$,

$v_{n+1} = -\frac{2}{3} u_n - 2n + 4 + 3n + 3 - \frac{21}{2}$,

$v_{n+1} = -\frac{2}{3} u_n + n - \frac{7}{2}$,

$v_{n+1} = -\frac{2}{3} u_n + \frac{3}{3} n - \frac{21}{2 \times 3} = \frac{1}{3}\left(-2 u_n + 3n - \frac{21}{2}\right)$,

$v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n$ donc v est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = -2 u_0 + 3 \times 0 - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2}$ donc, pour tout entier naturel n : $v_n = -\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

b. $v_n = -\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $v_n = -2 u_n + 3n - \frac{21}{2}$ donc $2 u_n = -v_n + 3n - \frac{21}{2}$

$2 u_n = \frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3n - \frac{21}{2}$ donc $u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3n - \frac{21}{2}\right)$ donc pour tout nombre entier naturel n : $u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2} n - \frac{21}{4}$.

c. $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$

$u_0 = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \frac{3}{2}\times 0 - \frac{21}{4}$

$u_1 = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^1 + \frac{3}{2}\times 1 - \frac{21}{4}$

$u_2 = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{3}{2}\times 2 - \frac{21}{4}$

…

$u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$

En additionnant terme à terme et en mettant d'une part $\frac{25}{4}$ en facteur pour tous les termes de la forme $\left(\frac{1}{3}\right)^k$ puis $\frac{3}{2}$ pour tous les termes de la forme 3 k et en remarquant que $-\frac{21}{4}$ figure (n + 1) fois :

$S_n = \frac{25}{4}\left(1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\ldots\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)+\frac{3}{2}(1+2+\ldots+n)-\frac{21}{4}(n+1)$

$1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\ldots\left(\frac{1}{3}\right)^n$ est une somme du type $1 + q + \ldots + q^n$ avec $q = \frac{1}{3}$ or si $q \neq 1$, $1 + q + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\ldots\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$

$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$S_n = \frac{25}{4}\times\frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)+\frac{3}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{21}{4}(n+1)$

$S_n = \frac{75}{8}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)+\frac{3}{4}n(n+1)-\frac{21}{4}(n+1)$

$S_n = \frac{75}{8}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)+\frac{3}{4}(n+1)(n-7)$

$-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{75}{8}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)=\frac{75}{8}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)(n-7) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

Ce qui pouvait se faire sans connaitre l'expression de S_n :
$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ or si $n \geq 4$, $u_n > 0$ donc si $n \geq 4$, $S_n > u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_n$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$