Métropole & La Réunion septembre 2009

L'espace est muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

1. On désigne par P le plan d'équation $x + y - 1 = 0$ et par P′ le plan d'équation $y + z - 2 = 0$.

Justifier que les plans P et P′ sont sécants et vérifier que leur intersection est la droite D, dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$, où t désigne un nombre réel.

2. (*a*) Déterminer une équation du plan R passant par le point O et orthogonal à la droite D.

(*b*) Démontrer que le point I, intersection du plan R et de la droite D, a pour coordonnées (0 ; 1 ; 1).

3. Soient A et B les points de coordonnées respectives $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ et (1 ; 1 ; 0).

(*a*) Vérifier que les points A et B appartiennent au plan R.

(*b*) On appelle A’ et B’ les points symétriques respectifs des points A et B par rapport au point I.

Justifier que le quadrilatère ABA’ B’ est un losange.

(*c*) Vérifier que le point S de coordonnées (2 ; − 1 ; 3) appartient à la droite D.

(*d*) Calculer le volume de la pyramide SABA’ B’.

On rappelle que le volume V d'une pyramide de base d'aire b et de hauteur h est : V = $\frac{1}{3} b \times h$.

CORRECTION

EXERCICE 2 : (5 points) Commun à tous les candidats

1. Le plan P admet pour vecteur normal $\vec{n}_P$ (1 ; 1 ; 0)

Le plan P' admet pour vecteur normal $\vec{n}_{P'}$ (0 ; 1 ; 1)

$\vec{n}_P$ et $\vec{n}_{P'}$ ne sont pas colinéaires donc les plans P et P′ sont sécants

Le point G d'ordonnée 0 de leur intersection a des coordonnées qui vérifient $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$ donc $x = 1$ et $z = 2$

donc G(1 ; 0 ; 2)

Le point H de cote 0 de leur intersection a des coordonnées qui vérifient $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$ donc $x = -1$ et $y = 2$

donc H(– 1 ; 2 ; 0)

$\overrightarrow{GH}$ est un vecteur directeur de la droite intersection des plans P et P'. $\overrightarrow{GH}$ a pour coordonnées (– 2 ; 2 ; – 2)

donc $\vec{u}$ (– 1 ; 1 ; – 1) est un vecteur directeur de la droite intersection des plans P et P'.

M ∈ D ⇔ il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$

⇔ il existe un réel t tel que $\begin{cases} x - 1 = -t \\ y = t \\ z - 2 = -t \end{cases}$

⇔ il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$

l'intersection des plans P et P' est la droite D, dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$, où t désigne un nombre réel.

2. (*a*) $\vec{u}$ (– 1 ; 1 ; 1) est un vecteur directeur de la droite D donc est un vecteur normal à R

Une équation de R est donc $-x + y - z = 0$ (la constante est nulle puisque ce plan passe par O) ou encore $x - y + z = 0$

(*b*) I appartient à D donc il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$

I appartient à R donc ses coordonnées vérifient $x - y + z = 0$

soit $(1 - t) - t + (2 - t) = 0$ donc $t = 1$

I a pour coordonnées (0 ; 1 ; 1)

3. Soient A et B les points de coordonnées respectives $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ et (1 ; 1 ; 0).

(a) Une équation de R est $x - y + z = 0$ or $-\frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} = 0$ donc $A \in R$
de même puisque $1 - 1 + 0 = 0$ alors $B \in R$

(b) I est le milieu des diagonales [AA'] et [BB'] du quadrilatère donc ABA' B' est un parallélogramme.
Il suffit donc de montrer que deux consécutifs ont la même longueur ou que les diagonales sont perpendiculaires.

I est le milieu de [AA'] donc $x_I = \frac{1}{2}(x_A + x_{A'})$ donc

$x_{A'} = 2x_I - x_A$ de même pour les autres coordonnées donc A' a pour coordonnées (0,5 ; 2 ; 1,5)

$AB^2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{2}$

$BA'^2 = \left(1-\frac{1}{2}\right)^2 + (1-2)^2 + \left(0-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{2}$ donc BA' = AB donc le quadrilatère ABA' B' est un losange.

(c) Il existe un réel $t = -1$ tel que $\begin{cases} x = 1 - t = 2 \\ y = t = -1 \\ z = 2 - t = 3 \end{cases}$ donc le point S de coordonnées (2 ; − 1 ; 3) appartient à la droite D.

(d) Le losange ABA'B' a pour aire $4 \times \mathscr{A}_{IAB}$

IAB est un triangle rectangle en I, $IA = \frac{1}{2}AA'$

or $AA'^2 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2 + (0-2)^2 + \left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 = 6$

donc $IA' = \frac{\sqrt{6}}{2}$ et $IB = \sqrt{2}$ donc $\mathscr{A}_{IAB} = \frac{1}{2} IA \times IB$

$\mathscr{A}_{IAB} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Le losange ABA'B' a pour aire $b = 2\sqrt{3}$

Le plan R est orthogonal à D et S est un point de D de projection orthogonale I (point d'intersection de R et de D) donc la distance de S au plan (IAB) est SI

$SI^2 = (2-0)^2 + (-1-1)^2 + (3-1)^2 = 12$

$SI = h = 2\sqrt{3}$

le volume de la pyramide SABA' B' est égal à $\frac{1}{3}$ $b \times h$ donc $V = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}$ soit V = 4