

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $] -\infty ; 6 [$ par : $f(x) = \frac{9}{6-x}$.

On définit pour tout entier naturel n la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. La courbe représentative de la fonction f est donnée sur la feuille jointe accompagnée de celle de la droite d'équation $y = x$. Construire, sur cette feuille annexe les points $M_0(u_0; 0)$, $M_1(u_1; 0)$, $M_2(u_2; 0)$, $M_3(u_3; 0)$ et $M_4(u_4; 0)$.

Quelles conjectures peut-on formuler en ce qui concerne le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (u_n) ?

2. a. Démontrer que si $x < 3$ alors $\frac{9}{6-x} < 3$. En déduire que $u_n < 3$ pour tout entier naturel n .

b. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .

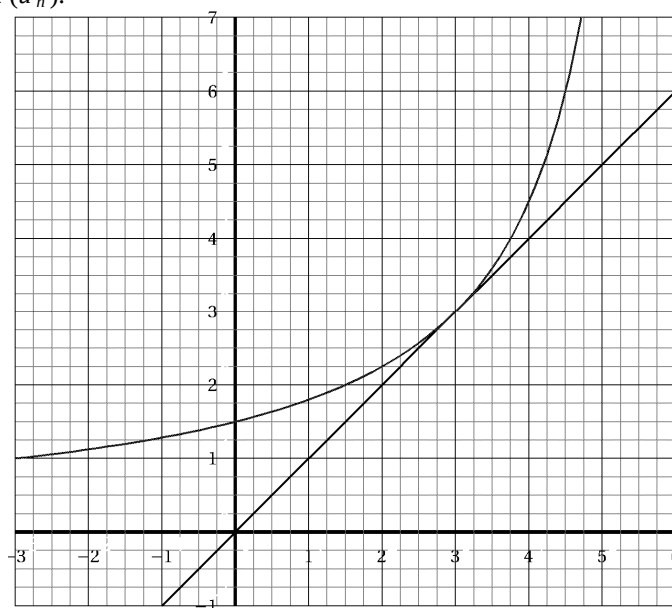
c. Que peut-on déduire des questions 2. a. et 2. b. ?

3. On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$ pour tout entier naturel n .

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

b. Déterminer v_n puis u_n en fonction de n .

c. Calculer la limite de la suite (u_n) .

**EXERCICE 2 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité****PARTIE A : Question de cours**

Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances ?

Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

PARTIE B

On note $0, 1, 2, \dots, 9, \alpha, \beta$, les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12.

Par exemple : $\overline{\beta\alpha 7}^{12} = \beta \times 12^2 + \alpha \times 12 + 7$

$\overline{\beta\alpha 7}^{12} = 11 \times 12^2 + 10 \times 12 + 7 = 1711$ en base 10

1. a. Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 : $N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$.

Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.

b. Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 : $N_2 = 1131 = 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10 + 1$

Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.

Dans toute la suite, un entier naturel N s'écrit de manière générale en base 12 : $N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}^{12}$.

2. a. Démontrer que $N \equiv a_0 (3)$. En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.

b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3.

Confirmer avec son écriture en base 10.

3. a. Démontrer que $N \equiv a_n + \dots + a_1 + a_0 (11)$. En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.

b. À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11.

Confirmer avec son écriture en base 10.

4. Un nombre N s'écrit $\overline{x4y}^{12}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33.

EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

Deux éleveurs produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois :

- pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10 % n'ont pas survécu, 75 % deviennent rouges et les 15 % restant deviennent gris.
- pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5 % n'ont pas survécu, 65 % deviennent rouges et les 30 % restant deviennent gris.

Une animalerie achète les alevins, à l'âge de deux mois : 60 % au premier éleveur, 40 % au second.

1. Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.
 - a. Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de 0,92.
 - b. Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.
 - c. Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage ?
2. Une personne choisit au hasard et de façon indépendante 5 alevins de deux mois. Quelle est la probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois soient en vie ? On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne 1 euro si le poisson est rouge, 0,25 euro s'il est gris et perd 0,10 euro s'il ne survit pas.
Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique, arrondie au centime.

EXERCICE 4 5 points Commun à tous les candidats

L'espace est rapporté à un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. Soit t un nombre réel.

On donne le point $A(-1 ; 2 ; 3)$ et la droite D de système d'équations paramétriques :
$$\begin{cases} x = 9 + 4t \\ y = 6 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

Le but de cet exercice est de calculer de deux façons différentes la distance d entre le point A et la droite D .

1.
 - a. Donner une équation cartésienne du plan P , perpendiculaire à la droite D et passant par A .
 - b. Vérifier que le point $B(-3 ; 3 ; -4)$ appartient à la droite D .
 - c. Calculer la distance d_B entre le point B et le plan P .
 - d. Exprimer la distance d en fonction de d_B et de la distance AB . En déduire la valeur exacte de d .
2. Soit M un point de la droite D . Exprimer AM en fonction de t . Retrouver alors la valeur de d .

CORRECTION

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

1. La suite (u_n) semble être croissante et converger vers 3.

2. a. f est une fonction continue, dérivable sur $] -\infty ; 6 [$

$$f'(x) = \frac{9}{(6-x)^2}.$$

$f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $] -\infty ; 6 [$,
donc si $x < 3$ alors $f(x) < f(3)$ or $f(3) = 3$ donc $f(x) < 3$

soit : si $x < 3$ alors $\frac{9}{6-x} < 3$.

Montrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n < 3$

Vérification : $u_0 = -3$ donc $u_0 < 3$, la propriété est vraie pour $n = 0$

Hérédité : Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$; si $u_n < 3$ alors $u_{n+1} < 3$

d'après la propriété précédente, si $x < 3$ alors $\frac{9}{6-x} < 3$ donc puisque $u_n < 3$ alors $f(u_n) < 3$

or $f(u_n) = u_{n+1}$ donc $u_{n+1} < 3$. La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$

$$b. \quad u_{n+1} - u_n = \frac{9}{6-u_n} - u_n = \frac{9-6u_n+u_n^2}{6-u_n} = \frac{(3-u_n)^2}{6-u_n}$$

$u_n < 3$ donc $(3-u_n)^2 > 0$ et $6-u_n > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$

La suite (u_n) est strictement croissante.

On pouvait aussi démontrer la propriété par récurrence.

Vérification : $u_0 = -3$ et $u_1 = 1$ donc $u_0 < u_1$, la propriété est vraie pour $n = 0$

Hérédité : Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$; si $u_n < u_{n+1} < 3$ alors $u_{n+1} < u_{n+2} < 3$

f est strictement croissante sur $] -\infty ; 6 [$, $u_n < u_{n+1} < 3$ donc $f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(3)$

or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(3) = 3$ donc $u_{n+1} < u_{n+2} < 3$. La propriété est héréditaire donc est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$

c. La suite (u_n) est strictement croissante, majorée par 3 donc converge et sa limite ℓ est inférieure ou égale à 3.

$$3. a. \quad v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}-3} \text{ or } u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n} \text{ donc } u_{n+1}-3 = \frac{9}{6-u_n} - 3 = \frac{9-18+3u_n}{6-u_n} = \frac{3(u_n-3)}{6-u_n} \text{ donc } v_{n+1} = \frac{6-u_n}{3(u_n-3)}$$

$$\text{donc } v_{n+1} - v_n = \frac{6-u_n}{3(u_n-3)} - \frac{1}{u_n-3} = \frac{6-u_n-3}{3(u_n-3)} = \frac{3-u_n}{3(u_n-3)} = -\frac{u_n-3}{3(u_n-3)} = -\frac{1}{3}$$

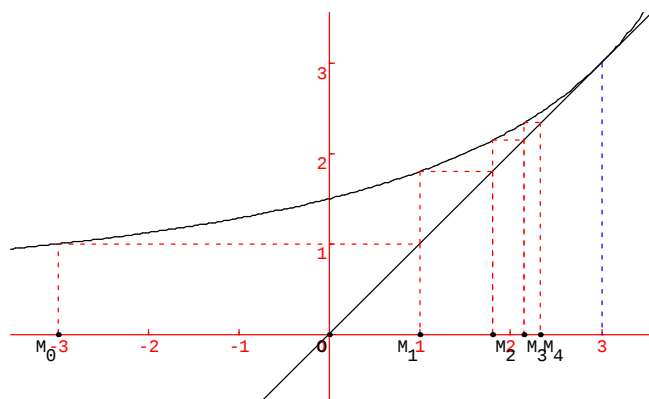
donc la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

b. (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = -\frac{1}{3}$ de premier terme v_0 donc $v_n = v_0 + n r$

$$v_0 = \frac{1}{u_0-3} = -\frac{1}{6} \text{ donc } v_n = \frac{-1-2n}{3} = -\frac{1+2n}{3}$$

$$v_n = \frac{1}{u_n-3} \text{ donc } u_n-3 = \frac{1}{v_n} \text{ donc } u_n = 3 + \frac{1}{v_n} \text{ soit } u_n = 3 - \frac{3}{1+2n}$$

$$c. \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{1+2n} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$$



EXERCICE 2 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**PARTIE A : Question de cours**

Soient a, b, c, d des entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

- Si $a \equiv b [p]$ alors $a + c \equiv b + c [p]$
Conséquence :
Si $a \equiv b [p]$ et $c \equiv d [p]$ alors $a + c \equiv b + d [p]$
- Si $a \equiv b [p]$ alors $ac \equiv bc [p]$
Conséquence :
Si $a \equiv b [p]$ et $c \equiv d [p]$ alors $ac \equiv bd [p]$
- Si $a \equiv b [p]$ alors $a^n \equiv b^n [p]$

Démonstration

Si $a \equiv b [p]$ alors p divise $a - b$ donc p divise $c(a - b)$ soit p divise $ac - bc$ soit $ac \equiv bc [p]$

Si $a \equiv b [p]$ alors $ac \equiv bc$ si $c \equiv d [p]$ alors $bc \equiv bd [p]$ donc d divise $ac - bc$ et d divise $bc - bd$ donc d divise leur somme
 d divise $ac - bc + bc - bd$ soit d divise $ac - bd$ donc $ac \equiv bd [p]$

PARTIE B

1. a. $N_1 = 11 \times 12^2 + 1 \times 12 + 10 = 1606$

b. $1131 = 7 \times 12^2 + 10 \times 12 + 3 = \overline{7\alpha 3}^{12}$

2. a. $N = a_n \times 12^n + \dots + a_1 \times 12 + a_0$ or $12 \equiv 0 [3]$ donc $N \equiv a_0 [3]$

Un nombre écrit en base 12 est divisible par 3 si son chiffre des unités est 0 ; 3 ; 6 ou 9.

b. $N_2 = \overline{7\alpha 3}^{12}$ donc $a_0 = 3$ donc $N_2 \equiv 0 [3]$ donc N_2 est divisible par 3.

$1131 = 3 \times 377$ donc N_2 est divisible par 3.

3. a. $\overline{a_n \dots a_1 a_0} = a_0 + a_1 \times 12 + a_2 \times 12^2 + \dots + a_n \times 12^n$ or $12 \equiv 1 [11]$ donc pour tout k entier naturel, $12^k \equiv 1 [11]$

donc $N \equiv a_n + \dots + a_1 + a_0 [11]$

N est divisible par 11 si et seulement si la somme de ses chiffres (en base 12) est divisible par 11

b. $N_1 = \overline{\beta 1 \alpha}^{12}$ or $11 + 1 + 10 = 22$ donc N_1 est divisible par 11.

$1606 = 11 \times 146$ donc N_1 est divisible par 11.

4. $1 \leq x \leq 11$ et $0 \leq y \leq 11$, 3 et 11 sont premiers entre eux, donc N est divisible par 33 si et seulement s'il est divisible par 11 et par 3

soit si et seulement si $y \equiv 0 [3]$ et $x + 4 + y \equiv 0 [11]$

si $y = 0$ alors $x = 7$ donc $N = 1056$

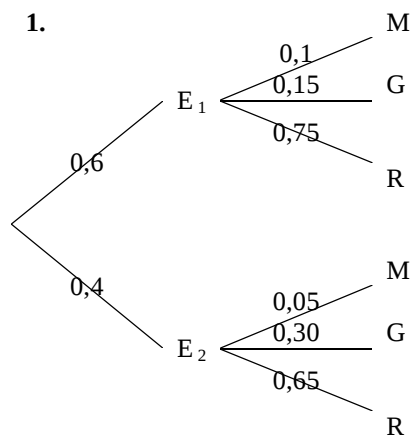
si $y = 3$ alors $x = 4$ donc $N = 327$

si $y = 6$ alors $x = 1$ donc $N = 198$

si $y = 9$ alors $x = 9$ donc $N = 1353$

EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

Soit les événements : M l'alevin est mort ; $\bar{M}$ l'alevin est en vie ; G l'alevin est gris ; R l'alevin est rouge.



1. a. $p(M) = p(M \cap E_1) + p(M \cap E_2) = 0,6 \times 0,01 + 0,4 \times 0,05 = 0,08$

$p(\bar{M}) = 1 - p(M)$ donc la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de 0,92.

1. b. $p(R) = p(R \cap E_1) + p(R \cap E_2) = 0,6 \times 0,75 + 0,4 \times 0,65 = 0,71$

1. c. $p_G(E_1) = \frac{p(G \cap E_1)}{p(G)}$

$p(G) = p(G \cap E_1) + p(G \cap E_2) = 0,6 \times 0,15 + 0,4 \times 0,3 = 0,21$

$p_G(E_1) = \frac{0,6 \times 0,15}{0,21} = \frac{3}{7} = 0,43$

2. Une personne choisit au hasard et de façon indépendante 5 alevins de deux mois. On a une succession de 5 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

- l'alevin est en vie ($p = 0,92$)
- l'alevin n'est pas en vie ($q = 0,08$)

donc la variable aléatoire X comptant le nombre d'alevins en vie suit une loi binomiale de paramètres (5 ; 0,92).

$p(X = 3) = \binom{5}{3} \times 0,92^3 \times 0,08^2 \approx 0,04984$

3.

x	- 0,1	1	0,25	Total
$p(X = x)$	0,08	0,21	0,71	1
$x p(X = x)$	- 0,008	0,21	0,1775	0,3795

$E(X) = 0,3795$

EXERCICE 4 5 points Commun à tous les candidats

1. a. Un vecteur directeur de D est le vecteur $\vec{u}(4; 1; 2)$, le plan P, perpendiculaire à la droite D donc $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan P donc une équation de P est $4x + y + 2z + d = 0$
 A appartient à P donc $-4 + 2 + 6 + d = 0$ soit $d = -4$
 Une équation de P est $4x + y + 2z - 4 = 0$

b. Le point de D correspondant à $t = -3$ a pour coordonnées $(-3; 3; -4)$ donc le point B $(-3; 3; -4)$ appartient à la droite D.

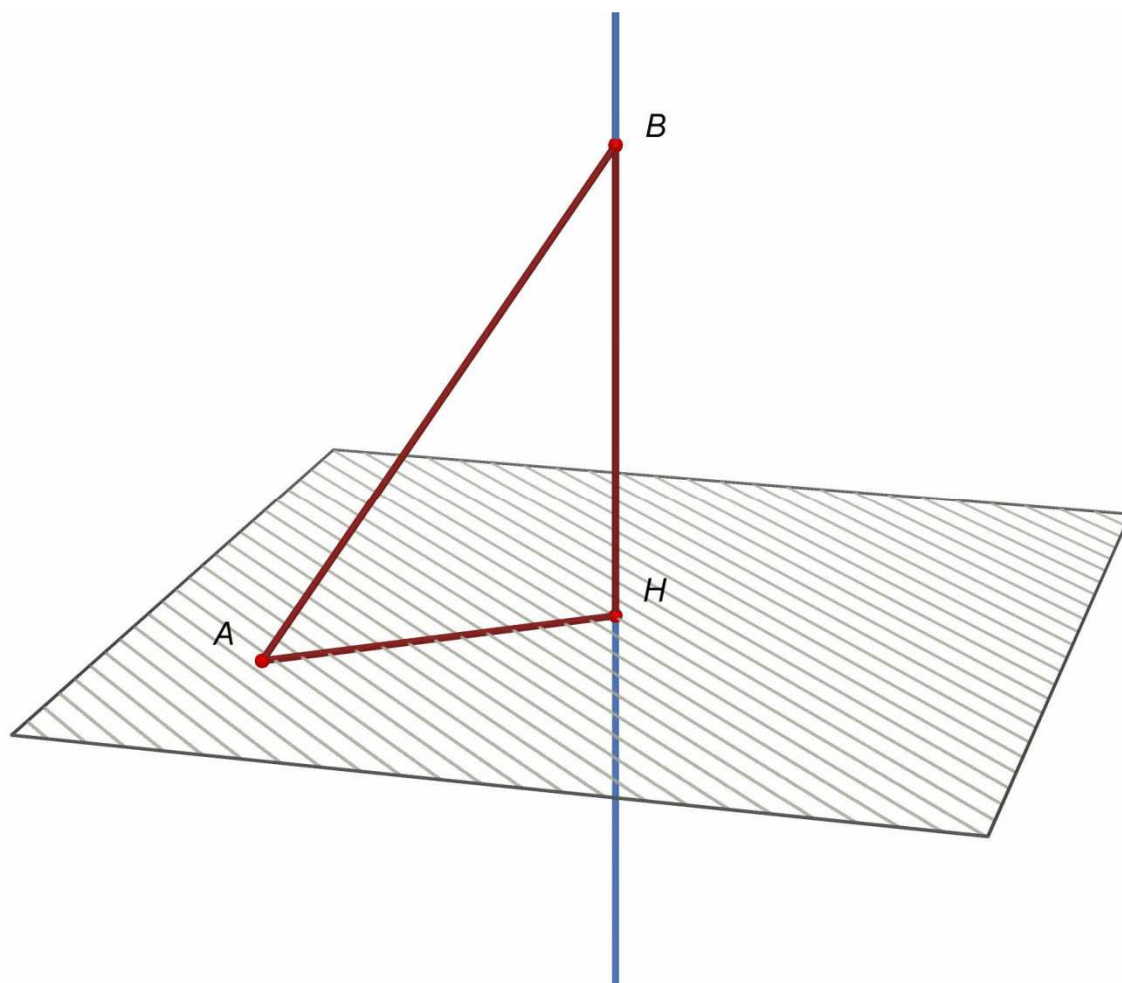
c. la distance d_B entre le point B et le plan P est $d_B = \frac{|4 \times (-3) + 3 + 2 \times (-3) - 4|}{\sqrt{4^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{21}{\sqrt{21}} = \sqrt{21}$

d. Soit H la projection orthogonale de B sur le plan P, $BH = d_B$

La droite D est perpendiculaire au plan P donc (AH) est perpendiculaire en H à la droite D donc le triangle AHB est rectangle en H et

$d = AH$ or $AH^2 + d_B^2 = AB^2$ donc $d = \sqrt{AB^2 - d_B^2}$ or $AB^2 = (-1 + 3)^2 + (2 - 3)^2 + (3 + 4)^2 = 54$ donc $d^2 = 54 - 21 = 33$

donc $d = \sqrt{33}$



2. M est un point de la droite D donc a pour coordonnées $(9 + 4t; 6 + t; 2 + 2t)$ donc : $AM^2 = (10 + 4t)^2 + (4 + t)^2 + (2t - 1)^2$.
 $AM^2 = 16t^2 + 80t + 100 + t^2 + 8t + 16 + 4t^2 - 4t + 1$ donc $AM^2 = 21t^2 + 84t + 117$.

La distance de A à la droite D est la plus petite distance AM, donc le carré de la distance correspond au minimum du trinôme $21t^2 + 84t + 117$.

Soit $f(t) = 21t^2 + 84t + 117$ alors $f'(t) = 42t + 84 = 42(t + 2)$ donc :

t	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
f			

f est décroissante sur $] -\infty; -2]$ et croissante sur $[-2; +\infty [$ donc f admet un minimum pour $t = -2$, $f(-2) = 33$ donc $d^2 = 33$ donc $d = \sqrt{33}$