Métropole – La Réunion septembre 2016

EXERCICE 1 commun à tous les candidats 6 POINTS

Les trois parties sont indépendantes. Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie 1

On estime qu'en 2013 la population mondiale est composée de 4,6 milliards de personnes âgées de 20 à 79 ans et que 46,1 % des personnes âgées de 20 à 79 ans vivent en zone rurale et 53,9 % en zone urbaine.

En 2013, d'après la fédération internationale du diabète, 9,9 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone urbaine est atteinte de diabète et 6,4 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone rurale est atteinte de diabète.

On interroge au hasard une personne âgée de 20 à 79 ans. On note :

R l'évènement : « la personne choisie habite en zone rurale »,

D l'évènement : « la personne choisie est atteinte de diabète ».

1. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.

2. *a.* Calculer la probabilité que la personne interrogée soit diabétique.

b. La personne choisie est diabétique. Quelle est la probabilité qu'elle habite en zone rurale ?

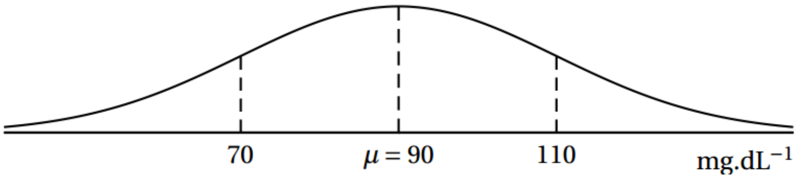
Partie 2

Une personne est dite en hypoglycémie si sa glycémie à jeun est inférieure à 60 mg.dL^{-1} et elle est en hyperglycémie si sa glycémie à jeun est supérieure à 110 mg. dL^{-1}. La glycémie à jeun est considérée comme « normale » si elle est comprise entre 70 mg.dL^{-1} et 110 mg.dL^{-1}. Les personnes ayant un taux de glycémie compris entre 60 et 70 mg.dL^{-1} ne font pas l'objet d'un suivi particulier.

On choisit au hasard un adulte dans cette population. Une étude *a* permis d'établir que la probabilité qu'il soit en hyperglycémie est 0,052 à 10^{-3} près. Dans la suite on admettra que cette probabilité est égale à 0,052.

On modélise la glycémie à jeun, exprimée en mg.dL^{-1}, d'un adulte d'une population donnée, par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ.

On donne ci-dessous la représentation graphique de la densité de probabilité de la variable aléatoire X.



1. Quelle est la probabilité que la personne choisie ait une glycémie à jeun « normale » ?

2. Déterminer la valeur de σ arrondie au dixième.

3. Dans cette question, on prend σ = 12. Calculer la probabilité que la personne choisie soit en hypoglycémie.

Partie 3

Afin d'estimer la proportion, pour l'année 2013, de personnes diagnostiquées diabétiques dans la population française âgée de 20 à 79 ans, on interroge au hasard 10 000 personnes.

Dans l'échantillon étudié, 716 personnes ont été diagnostiquées diabétiques.

1. À l'aide d'un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 %, estimer la proportion de personnes diagnostiquées diabétiques dans la population française âgée de 20 à 79 ans.

2. Quel doit être le nombre minimal de personnes à interroger si l'on veut obtenir un intervalle de confiance d'amplitude inférieure ou égale à 0,01 ?

EXERCICE 2 Commun à tous les candidats 4 POINTS

On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n \geq 0$ par la donnée de z_0, où z_0 est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence : $z_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{z_n}$.

1. *a.* Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$. Déterminer les nombres z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.

b. Dans cette question, on suppose que $z_0 = \mathrm{i}$. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.

c. Dans cette question on revient au cas général où z_0 est un complexe donné.

Que peut-on conjecturer pour les valeurs prises par z_{3n} selon les valeurs de l'entier naturel *n* ? Prouver cette conjecture.

2. Déterminer $z_{2\,016}$ dans le cas où $z_0 = 1 + \mathrm{i}$.

3. Existe-t-il des valeurs de z_0 tel que $z_0 = z_1$? Que peut-on dire de la suite (z_n) dans ce cas ?

EXERCICE 3 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 POINTS

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.

Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces.

Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1 - a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.

```
Variables :       a, b, d, s sont des entiers
                  i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation :  a prend la valeur 0
                  b prend la valeur 0
                  Saisir n
Traitement :      Pour i allant de 1 à n faire
                     | d prend la valeur d'un entier aléatoire compris entre 1 et 6
                     | Si d ≤ 2
                     |    | alors a prend la valeur 1 − a
                     |    | sinon Si d ≤ 4
                     |    |    | alors b prend la valeur 1 − b
                     |    | FinSi
                     |    | FinSi
                     |    | s prend la valeur a + b
                  FinPour
Sortie :          Afficher s
```

a. On exécute cet algorithme en saisissant $n = 3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 6 et 4. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

variables	i	d	a	b	s
initialisation					
1er passage boucle Pour					
2 e passage boucle Pour					
3 e passage boucle Pour					

b. Cet algorithme permet-il de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile ?

2. Pour tout entier naturel n, on note :

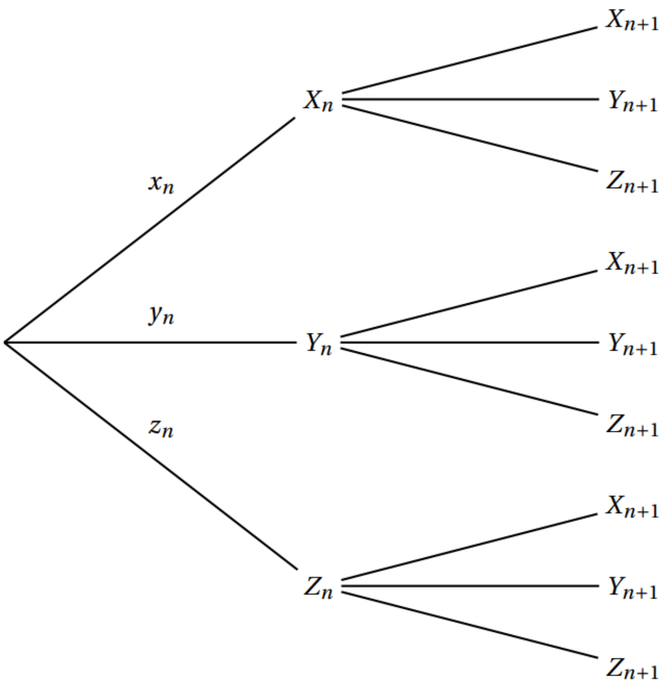
- X_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face »
- Y_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face »
- Z_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté pile ».

De plus on note, $x_n = P(X_n)$; $y_n = P(Y_n)$ et $z_n = P(Z_n)$ les probabilités respectives des évènements X_n, Y_n et Z_n.

a. Donner les probabilités x_0, y_0 et z_0 respectives qu'au début du jeu il y ait 0, 1 ou 2 pièces du côté pile.

b. Justifier que $P_{X_n}(X_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$.

c. Recopier l'arbre ci-contre et compléter les probabilités sur ses branches, certaines pouvant être nulles :



d. Pour tout entier naturel n, exprimer z_n en fonction de x_n et y_n.

e. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$y_{n+1} = -\frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}.$$

f. On pose, pour tout entier naturel n, $b_n = y_n - \dfrac{1}{2}$.

Montrer que la suite (b_n) est géométrique. En déduire que, pour tout entier naturel n, $y_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

g. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$. Interpréter le résultat.

EXERCICE 4 Commun à tous les candidats 5 POINTS

Un hélicoptère est en vol stationnaire au-dessus d'une plaine. Un passager lâche verticalement un colis muni d'un parachute.

Partie 1

Soit v_1 la fonction définie sur [0 ; + ∞ [par : $v_1(t) = 5 \times \dfrac{e^{0,3t} - 1}{e^{0,3t} + 1}$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction v_1.

2. On suppose, dans cette question, que le parachute fonctionne correctement.

On admet que t secondes après qu'il a été lâché, la vitesse du colis (exprimée en $m.s^{-1}$) est égale, avant d'atteindre le sol, à $v_1(t)$.

On considère que le colis arrive en bon état sur le sol si sa vitesse à l'arrivée n'excède pas 6 $m.s^{-1}$.

Le colis risque-t-il d'être endommagé lorsque le parachute s'ouvre correctement ? Justifier.

Partie 2

On suppose, dans cette partie, que le parachute ne s'ouvre pas.

On admet que, dans ce cas, avant que le colis atteigne le sol, sa vitesse (exprimée en $m.s^{-1}$), t secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par : $v_2(t) = 32,7\,(1 - e^{-0,3t})$

1. Quelle est la vitesse, exprimée en $m.s^{-1}$, atteinte par le colis au bout de 10 secondes ? Arrondir à 0,1 $m.s^{-1}$.

2. Résoudre l'équation $v_2(t) = 30$ $m.s^{-1}$. Donner une interprétation concrète de la solution de cette équation dans le cadre de cet exercice.

3. On sait que la chute du colis dure 20 secondes. On admet que la distance, en mètres, qui sépare l'hélicoptère du colis, T secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par : $d(T) = \displaystyle\int_0^T v_2(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que, pour tout réel T de l'intervalle [0 ; 20], $d(T) = 109\,(e^{-0,3T} + 0,3T - 1)$.

b. Déterminer une valeur approchée à 1 m près de la distance parcourue par le colis lorsqu'il atteint le sol.

4. Déterminer un encadrement d'amplitude 0,1 s du temps mis par le colis pour atteindre le sol si on l'avait lâché d'une hauteur de 700 mètres.

EXERCICE 3 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 POINTS

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 3 pièces A, B et C ayant chacune un côté pile et un côté face.

Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.

Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on retourne la pièce C.

Au début du jeu, les 3 pièces sont toutes du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face et 1 code le côté pile. Si a code un côté de la pièce A, alors $1 - a$ code l'autre côté de la pièce A.

```
Variables :        a, b, c, d, s sont des entiers
                   i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation :   a prend la valeur 0
                   b prend la valeur 0
                   c prend la valeur 0
                   Saisir n
Traitement :       Pour i allant de 1 à n faire
                      | d prend la valeur d'un entier aléatoire compris entre 1 et 6
                      | Si d ≤ 2
                      |    | alors a prend la valeur 1− a
                      |    | sinon Si d ≤ 4
                      |    |    | alors b prend la valeur 1− b
                      |    |    | sinon c prend la valeur 1− c
                      |    | FinSi
                      |    | FinSi
                      |    | s prend la valeur a + b + c
                   FinPour
Sortie :           Afficher s
```

a. On exécute cet algorithme en saisissant $n = 3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 4 et 2. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

variables	i	d	a	b	c	s
initialisation						
1er passage boucle Pour						
2 e passage boucle Pour						
3 e passage boucle Pour						

b. Cet algorithme permet-il de savoir si, après une exécution de n tirages, les trois pièces sont du côté pile ?

2. Pour tout entier naturel n, on note :

• X_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les trois pièces sont du côté face »

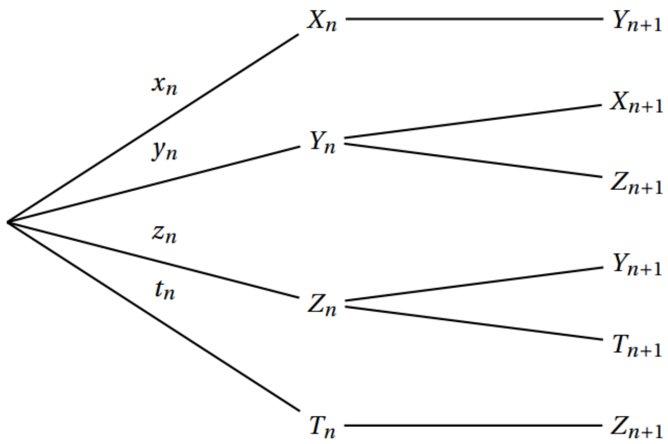
• Y_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, une seule pièce est du côté pile et les autres sont du côté face »

• Z_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, exactement deux pièces sont du côté pile et l'autre est du côté face »

• T_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les trois pièces sont du côté pile ».
De plus on note, $x_n = p(X_n)$; $y_n = p(Y_n)$; $\;_n = p(Z_n)$ et $t_n = p(T_n)$ les probabilités respectives des évènements X_n, Y_n, Z_n et T_n.

a. Donner les probabilités x_0 , y_0, z_0 et t_0 respectives qu'au début du jeu il y ait 0, 1, 2 ou 3 pièces du côté pile.

b. Recopier l'arbre ci-dessous et compléter les probabilités sur ses branches :



3. Pour tout entier naturel n, on note U_n la matrice ligne $(x_n \quad y_n \quad z_n \quad t_n)$.

a. Donner la matrice U_0.

b. À l'aide de l'arbre précédemment rempli, déterminer la matrice carrée M telle que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = U_n \times M$.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $U_n = U_0 \times M^n$.

5. On admet que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$x_n = \frac{(-1)^n + 3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}{8} \qquad y_n = \frac{-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n - (-1)^n\times 3 + 3}{8}$$

$$z_n = \frac{-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + (-1)^n\times 3 + 3}{8} \qquad t_n = \frac{-(-1)^n + 3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}{8}$$

a. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} près, qu'au bout de 5 lancers de dés, une seule des trois pièces soit du côté pile.

b. Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte

• Première affirmation :
« À l'issue d'un nombre pair de lancers de dés, les pièces peuvent être toutes les trois du côté pile ».

• Deuxième affirmation :
« Au cours du jeu, la probabilité que les pièces soient toutes les trois du côté pile peut être supérieure ou égale à $\frac{1}{4}$. ».

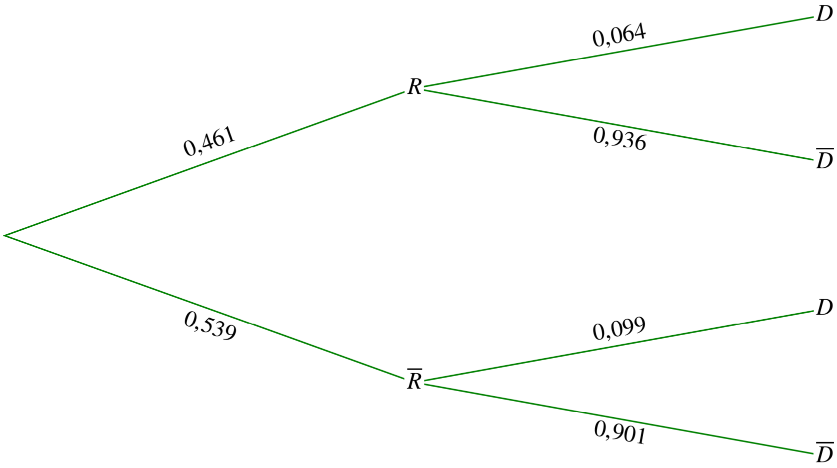
• Troisième affirmation :
« Au cours du jeu, la probabilité que les pièces soient toutes les trois du côté pile peut être supérieure ou égale à 0,249 ».

CORRECTION

EXERCICE 1 commun à tous les candidats 6 POINTS

Partie 1

1.



2. *a.* Calculer la probabilité que la personne interrogée soit diabétique.

p (D) = p (R ∩ D) + p ($\overline{R}$ ∩ D) = 0,461 × 0,064 + 0,539 × 0,099 = 0,082865 soit 0,083 à 10^{-3} près.

b. p_D (R) = $\dfrac{p(R \cap D)}{p(D)} = \dfrac{0,461 \times 0,064}{0,083} \approx 0,356$

Si la personne choisie est diabétique, la probabilité qu'elle habite en zone rurale est de 0,356.

Partie 2

1. La probabilité qu'une personne soit en hyperglycémie est 0,052 à 10^{-3} près donc P(X ≥ 110) = 0,052

La courbe étant symétrique par rapport à la droite x = 90 alors P(X ≤ 70) = 0,052

P(70 ≤ X ≤ 110) = 1 – P(X ≤ 70) – P(X ≥ 110) = 1 – 2 × 0,052 = 0,896.

La probabilité que la personne choisie ait une glycémie à jeun « normale » est 0,896.

2. Soit $T = \dfrac{X-90}{\sigma}$, T suit une loi normale centrée réduite donc $p(X \leq 70) = p\left(T \leq \dfrac{70-90}{\sigma}\right) = 0,052$

$$p\left(T \leq -\frac{20}{\sigma}\right) = 0,052 \Leftrightarrow 1 - p\left(T \leq \frac{20}{\sigma}\right) = 0,052 \Leftrightarrow p\left(T \leq \frac{20}{\sigma}\right) = 1 - 0,052 = 0,848 \text{ donc } \frac{20}{\sigma} \approx 1,626 \text{ soit } \sigma = \frac{20}{1,626} \approx 12,3$$

3. La probabilité que la personne choisie soit en hypoglycémie est p (0 ≤ X ≤ 60) soit 0,006 à 10^{-3} près. (fait à la calculette)

Partie 3

1. n = 10 000, f = 0,0716 donc $n\,f \geq 5$ et $n\,(1 - f) \geq 5$, les conditions d'utilisation d'un intervalle de confiance sont réunies.

$$I_{10\,000} = \left[\, 0,0756 - \frac{1}{\sqrt{10\,000}} \,;\, 0,0756 + \frac{1}{\sqrt{10\,000}} \,\right] \text{ soit } [0,0656 \,;\, 0,0856]$$

la proportion de personnes diagnostiquées diabétiques dans la population française âgée de 20 à 79 ans est comprise entre 6,56 % et 8,56 %.

2. $I_n = \left[\, 0,0756 - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \,;\, 0,0756 + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \,\right]$ donc l'amplitude de cet intervalle de confiance est $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$

Cette amplitude est inférieure ou égale à 0,01 si et seulement si $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,01$ soit $\dfrac{2}{0,01} \leq \sqrt{n}$ donc $n \geq 200^2$ soit $n \geq 40\,000$.

EXERCICE 2 Commun à tous les candidats 4 POINTS

1. *a.* $z_0 = 2$.

z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
0,5	– 1	2	0,5	2	0,5

b. $z_0 = \text{i}$, $\frac{1}{\text{i}} = -\text{i}$ donc

z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
1 + i	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\text{i}$	i	1 + i	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\text{i}$	i

c. $z_0 = z_3 = z_6$ donc on peut conjecturer que $z_{3n} = z_0$.

Initialisation : Si $n = 0$, $z_{3n} = z_0$ donc la propriété est initialisée

Hérédité : montrons pour tout entier n, que si $z_{3n} = 0$ alors $z_{3(n+1)} = z_0$

$z_{3n+1} = 1 - \frac{1}{z_{3n}} = 1 - \frac{1}{z_0} = \frac{z_0 - 1}{z_0}$, $z_{3n+2} = 1 - \frac{1}{z_{3n+1}} = 1 - \frac{z_0}{z_0 - 1} = -\frac{1}{z_0 - 1}$, $z_{3n+3} = 1 - \frac{1}{z_{3n+2}} = 1 + z_0 - 1 = z_0$ donc la propriété est héréditaire.

La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier n, $z_{3n} = z_0$.

2. 2 016 = 3 × 672 donc $z_{2\,016} = z_0 = 1 + \text{i}$.

3. Si $z_0 = z_1$ alors $z_1 = 1 - \frac{1}{z_0} = z_0$ donc $z_0^{\,2} = z_0 - 1$ soit z_0 est solution de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$

$\Delta = -3$ donc l'équation admet pour solutions $z_0' = \frac{1+\text{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_0'' = \frac{1-\text{i}\sqrt{3}}{2}$.

Si $z_0 = z_1$ alors pour tout n, $z_n = z_0$ donc, si $z_0 = \frac{1+\text{i}\sqrt{3}}{2}$ ou $z_0 = \frac{1-\text{i}\sqrt{3}}{2}$, la suite (z_n) est constante.

EXERCICE 3 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 POINTS

1. ***a.***

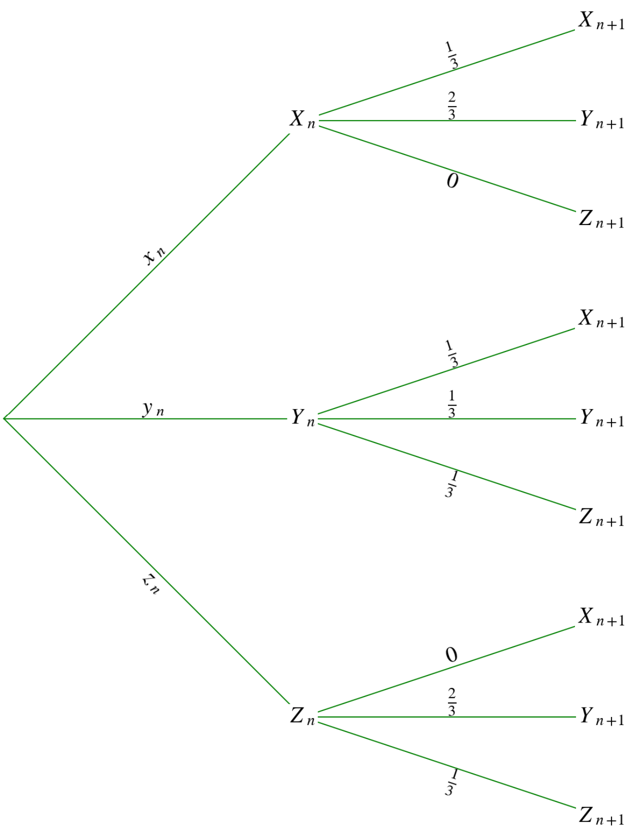
variables	i	*d*		*a*	*b*	*s*
initialisation				0	0	
1^er passage boucle Pour	1	1	$d \leq 2$ donc a prend la valeur $1 - a$, b est invariant	1	0	1
2 ^e^ passage boucle Pour	2	6	$d > 4$ donc a et b sont invariants	1	1	2
3 ^e^ passage boucle Pour	3	4	$d \leq 4$ donc a est invariant et b prend la valeur $1 - b$	1	0	1

b. A chaque étape la variable s détermine le nombre de pièces se trouvant du côté pile. Cet algorithme permet donc bien de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile ($s = 2$).

2. *a*. D'après l'énoncé $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et $z_0 = 0$.

b. X_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face » donc si X_n est réalisé, X_{n+1} le sera si les on ne retourne aucune des deux pièces donc si le dé amène le 5 ou le 6 donc $P_{X_n}(X_{n+1}) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

c.



Si les pièces sont du côté face au bout de n lancers alors, au lancer suivant, soit les pièces sont du côté face, soit une est du côté pile et l'autre du côté face

donc $p(X_n \cap Y_{n+1}) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$

Si, au lancer n, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face, alors la seule possibilité de conserver un tel état, au suivant $n + 1$, est d'obtenir avec le dé le 5 ou le 6 donc $p(Y_n \cap Y_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$.

De même $p(Y_n \cap X_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$ et $p(Y_n \cap Z_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$.

Si, au lancer n, les deux pièces sont du côté pile alors, au lancer suivant $n + 1$, on ne peut avoir que deux possibilités : les deux pièces sont toujours du côté pile ou alors l'une est du côté pile et l'autre du côté face.
Pour garder les pièces du côté pile il faut obtenir 5 ou 6 avec le dé.

Donc $p(Z_n \cap Z_{n+1}) = \dfrac{1}{3}$ et $p(Z_n \cap Y_{n+1}) = \dfrac{2}{3}$

d. Pour tout entier naturel n, $z_n = 1 - x_n - y_n$.

e. $y_{n+1} = p(X_n \cap Y_{n+1}) + p(Y_n \cap Y_{n+1}) + p(Z_n \cap Y_{n+1}) = \dfrac{2}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{2}{3}z_n$

or $z_n = 1 - x_n - y_n$ donc $y_{n+1} = \dfrac{2}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{2}{3}(1 - x_n - y_n)$, pour tout entier naturel n, $y_{n+1} = -\dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{2}{3}$.

f . Pour tout entier naturel n, $b_n = y_n - \dfrac{1}{2}$ donc $y_n = b_n + \dfrac{1}{2}$

$b_{n+1} = y_{n+1} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{3}y_n + \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{3}\left(b_n + \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{6} = -\dfrac{1}{3}b_n$ donc la suite (b_n) est géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{3}$ de premier terme $b_0 = y_0 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$ donc $b_n = b_0 q^n = -\dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Pour tout entier naturel n, $y_n = b_n + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

g. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$. Interpréter le résultat.

$-1 < -\dfrac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = \dfrac{1}{2}$.

Au bout d'un grand nombre de lancers, la probabilité d'obtenir une pièce du côté pile et une du côté face est de 50 %.

EXERCICE 4 Commun à tous les candidats 5 POINTS

Partie 1

1. $v_1(t) = 5 \times \dfrac{3\,\mathrm{e}^{0,3t}\,(\mathrm{e}^{0,3t}+1) - 3\,\mathrm{e}^{0,3t}\,(\mathrm{e}^{0,3t}-1)}{(\mathrm{e}^{0,3t}+1)^2} = \dfrac{30}{(\mathrm{e}^{0,3t}+1)^2}$ donc $v'_1(t) > 0$ sur $[0\,;+\infty[$.

v_1 est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. $v_1(t) = 5 \times \dfrac{\mathrm{e}^{0,3t}-1}{\mathrm{e}^{0,3t}+1} = 5\dfrac{\mathrm{e}^{-0,3t}(\mathrm{e}^{0,3t}-1)}{\mathrm{e}^{-0,3t}(\mathrm{e}^{0,3t}+1)} = 5 \times \dfrac{1-\mathrm{e}^{-0,3t}}{1+\mathrm{e}^{-0,3t}}$

$\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-3t} = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} v_1(t) = 5$

La fonction v_1 est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} v_1(t) = 5$ donc pour tout $t \geq 0, v_1(t) \leq 5$

Le colis ne risque pas d'être endommagé lorsque le parachute s'ouvre correctement.

Partie 2

On suppose, dans cette partie, que le parachute ne s'ouvre pas.

On admet que, dans ce cas, avant que le colis atteigne le sol, sa vitesse (exprimée en $m.s^{-1}$), t secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par : $v_2(t) = 32,7\,(1-\mathrm{e}^{-0,3t})$

1. $v_2(10) = 32,7\,(1 - \mathrm{e}^{-0,3\times 10}) \approx 31,1\ m.\,s^{-1}$.

2. $v_2(t) = 30\ m.\,s^{-1} \Leftrightarrow 32,7\,(1-\mathrm{e}^{-0,3t}) = 30 \Leftrightarrow 32,7 - 30 = 32,7 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0,3t} = \dfrac{2,7}{32,7} \Leftrightarrow -0,3\,t = \ln\left(\dfrac{2,7}{32,7}\right)$ soit $t = -\dfrac{\ln\left(\dfrac{2,7}{32,7}\right)}{0,3}$

$t \approx 8,3\ s$ donc au bout de 8,3 s la vitesse du colis, après avoir été lâché par le passager, est de 30 $m.\,s^{-1}$.

3. *a.* Pour tout réel T de l'intervalle [0 ; 20], $d(T) = \displaystyle\int_0^T v_2(t)\,\mathrm{d}t = \left[32,7\left(t - \frac{1}{-0,3}\ ^{-0,3t}\right)\right]_0^T$, $\dfrac{32,7}{0,3} = 109$ donc $32,7 = 109 \times 0,3$,

Pour tout réel T de l'intervalle [0 ; 20], $d(T) = 32,7\,T + 109 - 32,7\left(\dfrac{1}{0,3}\ ^{0}\right) = 109\,\mathrm{e}^{-0,3T} + 109 \times 0,3\,T - 109$

donc $d(T) = 109\,(\mathrm{e}^{-0,3T} + 0,3\,T - 1)$

b. T = 20 donc la distance parcourue par le colis lorsqu'il atteint le sol, est $d(20) = 109\,(\mathrm{e}^{-6} + 5)$ soit $d(20) \approx 545\ m$.

4. Il faut résoudre l'équation $d(\mathrm{T}) = 700$

$d'(\mathrm{T}) = v_2(\mathrm{T})$ or $v_2(\mathrm{T}) > 0$ pour tout T de [0 ; 20] donc la fonction d est définie, continue strictement croissantes sur [0 ; 20], $d(0) = 0$, et $\lim\limits_{t\to+\infty} d(T) = +\infty$ donc l'équation $d(\mathrm{T}) = 700$ admet une seule solution sur $[\,0\,;+\infty[$.

$d(24,7) \approx 698,7$ et $d(24,8) \approx 702$ donc $24,7 < \mathrm{T} < 702$.

EXERCICE 3 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 POINTS

1. *a.*

variables	i	*d*	*a*	*b*	*c*	*s*
initialisation			0	0	0	
1er passage boucle Pour		1	1	0	0	1
2 e passage boucle Pour		4	1	1	0	2
3 e passage boucle Pour		2	0	1	0	1

b. A chaque étape la variable *s* détermine le nombre de pièces se trouvant du côté pile.
L'algorithme permet donc de dite si, après *n* tirages, les trois pièces sont du côté pile.

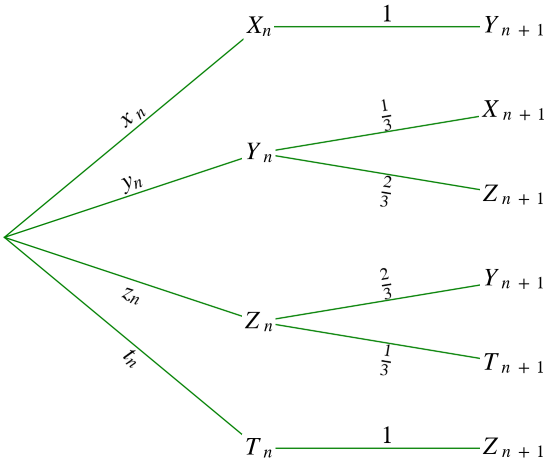
2. *a.* Au début du jeu, toutes les pièces sont du côté face, donc $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ et $t_0 = 0$

b. À l'issue de *n* lancers de dés, on a quatre cas :

α. les trois pièces sont du côté face donc au lancer suivant, une seule pièce est du côté pile et les autres sont du côté face donc $p_{X_n}(Y_{n+1}) = 1$, $p_{X_n}(X_{n+1}) = 0$, $p_{X_n}(Z_{n+1}) = 0$

β. une seule pièce est du côté pile et les autres sont du côté face alors au lancer suivant, soit on retourne la pièce qui est du côté pile et on a trois pièces sont du côté face $p_{Y_n}(X_{n+1}) = \frac{1}{3}$, soit on retourne une des deux pièces qui est du côté face, et on a alors exactement deux pièces sont du côté pile et l'autre est du côté face $p_{Y_n}(Z_{n+1}) = \frac{2}{3}$

χ. exactement deux pièces sont du côté pile et l'autre est du côté face alors au lancer suivant, soit on retourne la pièce qui est du côté face et on a trois pièces sont du côté pile $p_{Z_n}(T_{n+1}) = \frac{1}{3}$, soit on retourne une des deux pièces qui est du côté pile, et on a alors exactement deux pièces sont du côté face et l'autre est du côté pile $p_{Z_n}(Y_{n+1}) = \frac{2}{3}$.



δ. les trois pièces sont du côté pile donc au lancer suivant, une seule pièce est du côté face et les autres sont du côté pile donc $p_{T_n}(Z_{n+1}) = 1$.

3. *a.* $U_0 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$

b. D'après l'arbre de choix on a :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{3} y_n \\ y_{n+1} = x_n + \frac{2}{3} z_n \\ z_{n+1} = \frac{2}{3} y_n + t_n \\ t_{n+1} = \frac{1}{3} z_n \end{cases} \quad \text{donc M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Initialisation, $M \neq O$ donc $M^0 = I_4$ donc $U_0 \times M^0 = U_0$, la propriété est initialisée.
Hérédité : montrons pour tout *n* de N que si $U_n = U_0 \times M^n$ alors $U_{n+1} = U_0 \times M^{n+1}$.
$U_{n+1} = U_n \times M$ or $U_n = U_0 \times M^n$ donc $U_{n+1} = U_0 \times M \times M^n = U_0 \times M^{n+1}$
La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier naturel *n*, $U_n = U_0 \times M^n$.

5. *a.* La probabilité qu'au bout de 5 lancers de dés, une seule des trois pièces soit du côté pile est y_5

$$y_5 = \frac{-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^5 + 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^5 - (-1)^5 \times 3 + 3}{8} = \frac{3\times\frac{1}{3^5} + 3\times\frac{1}{3^5} + 3 + 3}{8} = \frac{\frac{1}{3^4} + 3}{4}$$ donc $y_5 \approx 0{,}753$.

b. **Première affirmation fausse :**

$$t_n = \frac{-(-1)^n + 3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}{8}$$ or si *n* est pair, $(-1)^n = 1$ et $\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ donc $t_n = 0$

Deuxième affirmation fausse :
Un entier n est soit pair soit impair.

Si n est pair $t_n = 0$, donc $t_n \leq \dfrac{1}{4}$

si n est impair $(-1)^n = -1$ et $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ donc $t_n = \dfrac{1-3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n - 3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 1}{8} = \dfrac{1-\dfrac{1}{3^{n-1}}}{4}$

$t_n = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\dfrac{1}{3^{n-1}}}{4}$ donc si n est impair, $t_n \leq \dfrac{1}{4}$

• Troisième affirmation vraie :
A l'aide de la calculette, on remarque que $t_7 \approx 0{,}2496$ donc $t_7 \geq 0{,}249$

Sans calculatrice, $t_n \geq 0{,}249 \Leftrightarrow$ n est impair et $\dfrac{1}{4} - \dfrac{\dfrac{1}{3^{n-1}}}{4} \geq 0{,}249$ $\Leftrightarrow$ n est impair et $\dfrac{1}{4} - 0{,}249 \geq \dfrac{\dfrac{1}{3^{n-1}}}{4}$ $\Leftrightarrow$

n est impair et $0{,}004 \geq \dfrac{1}{3^{n-1}}$ $\Leftrightarrow 3^{n-1} \geq \dfrac{1}{0{,}004}$ $\Leftrightarrow$ n est impair et $(n-1)\ln 3 \geq 250$ $\Leftrightarrow$ n est impair et $n - 1 \geq \dfrac{\ln 250}{\ln 3}$

$\Leftrightarrow$ n est impair et $n - 1 \geq 6 \Leftrightarrow$ n est impair et $n \geq 7$