Antilles Guyane juin 2005

1. *a.* Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n.
b. Démontrer alors que $(2\,005)^{2\,005} \equiv 7$ (9).
2. *a.* Démontrer que pour tout entier naturel non nul n $(10)^n \equiv 1$ (9).
b. On désigne par N un entier naturel écrit en base dix, on appelle S la somme de ses chiffres.
Démontrer la relation suivante : N ≡ S (9).
c. En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.
3. On suppose que $A = (2\,005)^{2\,005}$; on désigne par :
– B la somme des chiffres de A ;
– C la somme des chiffres de B ;
– D la somme des chiffres de C.
a. Démontrer la relation suivante : A ≡ D (9).
b. Sachant que 2 005 < 10 000, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8 020 chiffres.
En déduire que B ≤ 72 180.
c. Démontrer que C ≤ 45.
d. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.
e. Démontrer que D = 7.

CORRECTION

1. *a.* $7 \equiv -2$ (9) donc $7^2 \equiv 4$ (9) donc $7^3 \equiv -8$ (9) soit $7^3 \equiv 1$ (9)
Soit n un entier naturel,
soit $n = 3p$ ($p \in$ Z) donc $7^{3p} \equiv 1$ (9)
soit $n = 3p + 1$ ($p \in$ Z) donc $7^{3p+1} = 7^{3p} \times 7$ donc $7^{3p+1} \equiv 7$ (9)
soit $n = 3p + 2$ ($p \in$ Z) donc $7^{3p+2} = 7^{3p} \times 7^2$ donc $7^{3p+2} \equiv 7^2$ (9) soit donc $7^{3p+2} \equiv 4$ (9)

1. *b.* $2\,005 = 9 \times 222 + 7$ donc $2\,005 \equiv 7$ (7) donc $(2\,005)^{2\,005} \equiv 7^{2\,005}$ (9).
$2\,005 = 3 \times 668 + 1$ donc $7^{2\,005} \equiv 7$ (9)

2. *a.* $10 \equiv 1$ (9) donc pour tout entier naturel non nul n $(10)^n \equiv 1$ (9).

2. *b.* $N = \overline{a_n\, a_{n-1} \dots a_0} = a_0 + a_1 \times 10 + \dots + a_n \times 10^n$
pour tout entier naturel non nul k $(10)^k \equiv 1$ (9) donc $a_0 + a_1 \times 10 + \dots + a_n \times 10^n \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_n$ (9)
donc N ≡ S (9)

2. *c.* N est divisible par 9 ⇔ N ≡ 0 (9) ⇔ S ≡ 0 (9) ⇔ S est divisible par 9.

3. ***a.*** $A = (2\,005)^{2\,005}$; d'après la question 2. *b.*, A ≡ B (9) et B ≡ C (9) et C ≡ D (9) donc A ≡ D (9)

3**. *b.*** $2\,005 < 10^4$ donc $A < 10^{4 \times 2005}$ soit $A < 10^{8\,020}$ donc A s'écrit en numération décimale avec au plus 8 020 chiffres.
Chaque chiffre de A est inférieur ou égal à 9 donc B ≤ 8 020 × 9 soit B ≤ 72 180.

3**. *c.*** $72\,180 < 10^5$ donc B s'écrit en numération décimale avec au plus 5 chiffres.
Chaque chiffre de B est inférieur ou égal à 9 donc C ≤ 5 × 9 soit C ≤ 45.

3. *d.* C ≤ 45 donc si C est un chiffre compris entre 0 et 39, la somme des chiffres de C est inférieure ou égale à 12
Si C est compris entre 40 et 45, la somme des chiffres de C est comprise entre 4 et 9 donc 0 < D ≤ 12.

3. *e.* D ≡ 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 modulo (9) or A ≡ D (9) et A ≡ 7 (9) donc D ≡ 7 (9)
donc 9 divise D – 7, or – 7 < D – 7 ≤ 5 et le seul multiple de 9 compris entre – 7 et 5 est 0 donc D = 7