Un logiciel permet de transformer un élément rectangulaire d'une photographie.
Ainsi, le rectangle initial OEFG est transformé en un rectangle O E ′ F ′ G ′, appelé image de OEFG.

L'objet de cet exercice est d'étudier le rectangle obtenu après plusieurs transformations successives.

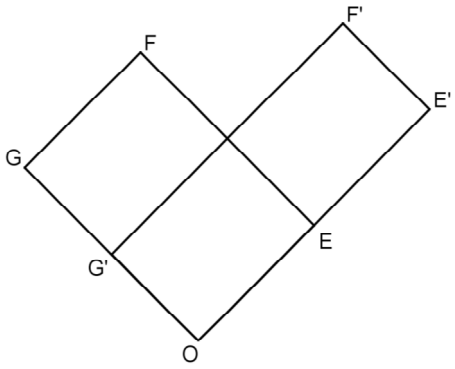

Figure 1

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
Les points E, F et G ont pour coordonnées respectives (2 ; 2), (– 1 ; 5) et (– 3 ; 3).
La transformation du logiciel associe à tout point M(x ; y) du plan le point M′ (x' ; y'), image du point M tel que : $\begin{cases} x' = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y \\ y' = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y \end{cases}$

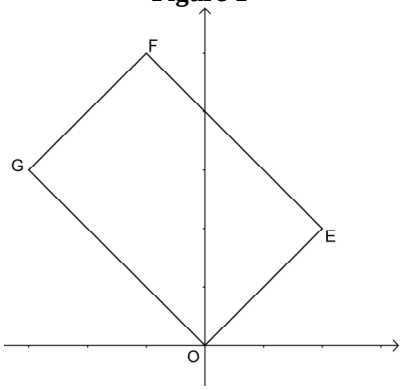

Figure 2

1. ***a.*** Calculer les coordonnées des points E′, F′, et G′, images des points E, F et G par cette transformation.
b. Comparer les longueurs OE et OE′ d'une part, OG et OG′ d'autre part.

Donner la matrice carrée d'ordre 2, notée A, telle que : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Partie B

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet F du rectangle OEFG lorsqu'on applique plusieurs fois la transformation du logiciel.

1. On considère l'algorithme suivant destiné à afficher les coordonnées de ces images successives. Une erreur a été commise. Modifier cet algorithme pour qu'il permette d'afficher ces coordonnées.

Entrée	Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à x la valeur − 1 Affecter à y la valeur 5
Traitement	POUR i allant de 1 à N Affecter à a la valeur $\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y$ Affecter à b la valeur $\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y$ Affecter à x la valeur a Affecter à y la valeur b FIN POUR
Sortie	Afficher x, afficher y

2. On a obtenu le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	10	15
x	2,5	7,25	15,625	31,8125	63,9063	2047,9971	65535,9999
y	5,5	8,75	16,375	32,1875	64,0938	2048,0029	65536,0001

Conjecturer le comportement de la suite des images successives du point F.

Partie C

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet E du rectangle OEFG. On définit la suite des points E_n (x_n ; y_n) du plan par E_0 = E et la relation de récurrence : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, où ($x_{n+1}$; y_{n+1}) désignent les coordonnées du point E_{n+1}. Ainsi $x_0 = 2$ et $y_0 = 2$.

1. On admet que, pour tout entier $n \geq 1$, la matrice A^n peut s'écrire sous la forme : $A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}$ et $\beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}$.

2. ***a.*** Démontrer que, pour tout entier naturel n, le point E_n est situé sur la droite d'équation $y = x$.

On pourra utiliser que, pour tout entier naturel n, les coordonnées $(x_n ; y_n)$ du point E_n vérifient : $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b. Démontrer que la longueur OE_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

CORRECTION

1. ***a.*** E' a pour coordonnées $\begin{cases} x' = \frac{5}{4} \times 2 + \frac{3}{4} \times 2 \\ y' = \frac{3}{4} \times 2 + \frac{5}{4} \times 2 \end{cases}$ soit (4 ; 4)

de même F' a pour coordonnées (2,5 ; 5,5) et G' a pour coordonnées (– 1,5 ; 1,5)

b. $OE^2 = 2^2 + 2^2 = 8$ donc $OE = 2\sqrt{2}$, $OE'^2 = 4^2 + 4^2$ donc $OE' = 4\sqrt{2} = 2\,OE$

$OG^2 = (-3)^2 + 3^2$ donc $OG = 3\sqrt{2}$ $OG'^2 = (-1{,}5)^2 + 1{,}5^2$ donc $OG' = 1{,}5\sqrt{2}$, $OG' = \frac{1}{2}OG$.

La transformation ne conserve pas les longueurs, ni ne les multiplie par un même nombre.

$\begin{cases} x' = \frac{5}{4} \times 2 + \frac{3}{4} \times 2 \\ y' = \frac{3}{4} \times 2 + \frac{5}{4} \times 2 \end{cases}$ donc $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$.

Partie B

1. L'algorithme est destiné à afficher les coordonnées de ces images successives, or l'algorithme proposé ne permet d'obtenir que le dernier terme u_N, il faut donc intégrer dans la boucle « Pour », l'affichage de x et de y.

Entrée	Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à x la valeur − 1 Affecter à y la valeur 5
Traitement	POUR i allant de 1 à N Affecter à a la valeur $\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y$ Affecter à b la valeur $\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y$ Affecter à x la valeur a Affecter à y la valeur b Afficher x, Afficher y FIN POUR
Sortie	

2. Apparemment les coordonnées de F tendent vers $+\infty$ et le point se rapproche de la droite d'équation $y = x$.

Partie C

1. Montrons que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}$ et $\beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}$.

Initialisation : si $n = 1$, $2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = \alpha_0$ et $2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \beta_0$.

La propriété est vérifiée pour $n = 1$

Hérédité : montrons que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}$ et $\beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}$, alors : $\alpha_{n+1} = 2^n + \frac{1}{2^{n+2}}$ et $\beta_{n+1} = 2^n - \frac{1}{2^{n+2}}$

$A^{n+1} = A \times A^n = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4}\alpha_n + \frac{3}{4}\beta_n & \frac{5}{4}\beta_n + \frac{3}{4}\alpha_n \\ \frac{5}{4}\beta_n + \frac{3}{4}\alpha_n & \frac{5}{4}\alpha_n + \frac{3}{4}\beta_n \end{pmatrix}$ donc $\alpha_{n+1} = \frac{5}{4}\alpha_n + \frac{3}{4}\beta_n$ et $\beta_{n+1} = \frac{3}{4}\alpha_n + \frac{5}{4}\beta_n$

$\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}$ et $\beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}$, donc $\alpha_{n+1} = \frac{5}{4}\left(2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) + \frac{3}{4}\left(2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$

$\alpha_{n+1} = \left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4}\right)2^{n-1} + \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4}\right)\frac{1}{2^{n+1}}$ donc $\alpha_{n+1} = 2 \times 2^{n-1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n+1}} = 2^n + \frac{1}{2^{n+2}}$

$\beta_{n+1} = \frac{3}{4}\left(2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) + \frac{5}{4}\left(2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ donc $\beta_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{4}\right)2^{n-1} + \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{4}\right)\frac{1}{2^{n+1}}$

$\beta_{n+1} = 2 \times 2^{n-1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n+1}} = 2^n - \frac{1}{2^{n+2}}$

La propriété est héréditaire donc , pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}$ et $\beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}$.

2. ***a.*** Pour tout entier naturel n, $x_n = 2\alpha_n + 2\beta_n$ et $y_n = 2\alpha_n + 2\beta_n$ donc $x_n = y_n$ donc pour tout entier naturel n, le point E_n est situé sur la droite d'équation $y = x$.

b. $OE_n^2 = x_n^2 + y_n^2 = 4(\alpha_n + \beta_n)^2 + 4(\alpha_n + \beta_n)^2 = 8(\alpha_n + \beta_n)^2$

$\alpha_n + \beta_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} + 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}$

$\alpha_n + \beta_n = 2 \times 2^{n-1}$ donc $\alpha_n + \beta_n = 2^n$

$\alpha_n + \beta_n > 0$ donc $OE_n = 2(\alpha_n + \beta_n)\sqrt{2}$

$OE_n = 2^{n+1}\sqrt{2}$

$2 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} OE_n = +\infty$.