Pondichéry 2001

1. On considère l'équation (1) d'inconnue (n, m) élément de $\mathbb{Z}^2$: $11\,n - 24\,m = 1$.

a. Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.
b. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).
c. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).
2. ***a.*** Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.
b. (n, m) désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), montrer que l'on peut écrire :

$$(10^{11\,n} - 1) - 10\,(10^{24\,m} - 1) = 9.$$

c. Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11\,n} - 1$.
(on rappelle l'égalité $a^n - 1 = (a - 1)\,(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^0)$, valable pour tout entier naturel n non nul).
Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que : $(10^{11} - 1)\,N - (10^{24} - 1)\,M = 9$.
d. Montrer que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.
e. Déduire des questions précédentes le P.G.C.D. de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$.

CORRECTION

1. ***a.*** Les nombres 11 et 24 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Bézout, il existe au moins un couple d'entiers u et v tels que $11\,u + 24\,v = 1$ donc l'équation (1) admet au moins une solution.

b. $\begin{cases} 24 = 2 \times 11 + 2 \\ 11 = 5 \times 2 + 1 \end{cases}$ donc $-5 \times 24 + 11 = -5\,(2 \times 11 + 2) + 5 \times 2 + 1$ soit $-5 \times 24 + 11 = -10 \times 11 + 1$

$-5 \times 24 + 11 + 10 \times 11 = 1$ donc $11 \times 11 - 5 \times 24 = 1$, le couple (11 ; 5) est une solution particulière de l'équation (1).

c. $\begin{cases} 11\,n - 24\,m = 1 \\ 11 \times 11 - 5 \times 24 = 1 \end{cases}$ donc par différence membre à membre : $11\,(n - 11) - 24\,(m - 5) = 0$

$11\,(n - 11) = 24\,(m - 5)$ donc 11 divise $24\,(m - 5)$
11 et 24 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 11 divise $m - 5$
Il existe un entier k tel que $m - 5 = 11\,k$ donc en remplaçant dans $11\,(n - 11) = 24\,(m - 5)$ alors $n - 11 = 24\,k$
donc $n = 24\,k + 11$ et $m = 11\,k + 5$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est solutions de (1).

Vérification : si $n = 24\,k + 11$ et $m = 11\,k + 5$ alors $11\,n - 24\,m = 11\,(24\,k + 11) - 24\,(11\,k + 5) = 11 \times 11 - 24 \times 5 = 1$
Les solutions de (1) sont les couples ($k + 11$; $11\,k + 5$), $k \in \mathbb{Z}$.

2. ***a.*** $10 \equiv 1$ modulo 9 donc $10^{11} \equiv 1$ modulo 9 donc 9 divise $10^{11} - 1$
$10 \equiv 1$ modulo 9 donc $10^{24} \equiv 1$ modulo 9 donc 9 divise $10^{24} - 1$.

b. (n, m) désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), donc $11\,n - 24\,m = 1$ soit $11\,n = 24\,m + 1$
$(10^{11\,n} - 1) - 10\,(10^{24\,m} - 1) = (10^{24\,m+1} - 1) - 10\,(10^{24\,m} - 1) = 10^{24\,m+1} - 1 - 10 \times 10^{24\,m} + 10$
$(10^{11\,n} - 1) - 10\,(10^{24\,m} - 1) = 10^{24\,m+1} - 10^{24\,m+1} + 9$
$(10^{11\,n} - 1) - 10\,(10^{24\,m} - 1) = 9$

c. $a^n - 1 = (a - 1)\,(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^0$ devient si $a = 10$,
pour tout n non nul : $10^{11\,n} - 1 = (10^{11} - 1)\,(10^{11\,(n-1)} + \ldots + 10^{11} + 1)$ or pour tout entier n non nul, $(10^{11\,(n-1)} + \ldots + 10^{11} + 1) \in \mathbb{N}$
donc $10^{11} - 1$ divise $10^{11\,n} - 1$ donc il existe un entier q ($q = 10^{11\,(n-1)} + \ldots + 10^{11} + 1$) tel que $10^{11\,n} - 1 = (10^{11} - 1)\,q$

De même en choisissant $a = 10^{24}$, on démontre que $10^{24} - 1$ divise $10^{24\,n} - 1$
donc il existe un entier q' ($q' = 10^{24\,(n-1)} + \ldots + 10^{24} + 1$) tel que $10^{24\,n} - 1 = (10^{24} - 1)\,q'$

$(10^{11\,n} - 1) - 10\,(10^{24\,m} - 1) = 9$ donc $(10^{11} - 1)\,q - 10 \times (10^{24} - 1)\,q' = 9$ soit $(10^{11} - 1)\,q - 10\,q' \times (10^{24} - 1) = 9$
En posant $N = q$ et $M = 10\,q'$, il existe deux entiers $\mathbb{N}$ et M tels que : $(10^{11} - 1)\,N - (10^{24} - 1)\,M = 9$.

d. Tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise $(10^{11} - 1)\,N - (10^{24} - 1)\,M$ donc divise 9.

e. Le P.G.C.D. de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ est un diviseur commun de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ donc divise 9 (question 2. *d*.)
Or 9 est un diviseur commun de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ (question 2. *a*.) donc 9 divise P.G.C.D. de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$.
P.G.C.D.($10^{24} - 1$; $10^{11} - 1$) divise 9 et 9 divise P.G.C.D.($10^{24} - 1$; $10^{11} - 1$) donc P.G.C.D.($10^{24} - 1$; $10^{11} - 1$) = 9