France métropolitaine sept 2004

Le but de ce problème est d'étudier, pour x et y éléments distincts de l'intervalle] 0 ; + ∞ [, les couples solutions de l'équation $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$ (E) et, en particulier, les couples constitués d'entiers.

1. Soit h la fonction définie sur l'intervalle] 0 ; + ∞[par $h(x) = \frac{\ln x}{x}$

La courbe (C) représentative de la fonction h est donnée ci-contre ; x_0 est l'abscisse du maximum de la fonction h sur l'intervalle] 0 ; + ∞ [.

1. *a*. Déterminer la limite de la fonction h en 0.

On admettra que la limite de h en + ∞ est 0.

1. *b*. Calculer $h'(x)$, où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h ; retrouver les variations de la fonction h.

Déterminer les valeurs exactes de x_0 et de $h(x_0)$.

1. *c*. Déterminer l'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.

2. Soit λ un élément de l'intervalle] 0 ; e^{-1} [.

Prouver l'existence d'un unique nombre réel a de l'intervalle] 1 ; e [et d'un unique nombre réel b de l'intervalle] e ; + ∞ [tels que $h(a) = h(b) = \lambda$.

Ainsi le couple (a ; b) est solution de (E).

3. On considère la fonction s qui, à tout nombre réel a de l'intervalle [1 ; e [, associe l'unique nombre réel b de l'intervalle] e ; + ∞ [tel que $h(a) = h(b)$ (on ne cherchera pas à exprimer $s(a)$ en fonction de a).

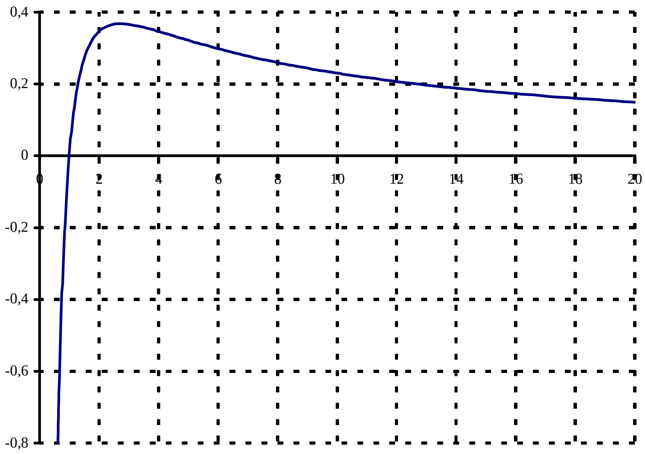
Par lecture graphique uniquement et sans justification, répondre aux questions suivantes

3. *a*. Quelle est la limite de s quand a tend vers 1 par valeurs supérieures ?

3. *b*. Quelle est la limite de s quand a tend vers e par valeurs inférieures ?

3. *c*. Déterminer les variations de la fonction s. Dresser le tableau de variation de s.

4. Déterminer les couples d'entiers distincts solutions de (E).



CORRECTION

1. *a*. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} h(x) = -\infty$.

1. *b*. $h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ donc $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e$

x	0		e		+ ∞
$h'(x)$		+	0	–	
h	– ∞	↗	e^{-1}	↘	0

$x_0 = e$ et $h(x_0) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$ donc $h(x_0) = e^{-1}$

1. *c*. $h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

2. La fonction h est définie continue strictement croissante sur $]\,1\,;\,e\,[$, $f\,(\,]\,1\,;\,e\,[\,) =]\,0\,;\,e^{-1}\,[$ donc pour tout λ de $]\,0\,;\,e^{-1}\,[$, l'équation $f\,(x) = \lambda$ admet une solution unique a dans $]\,1\,;\,e\,[$.
La fonction h est définie continue strictement croissante sur $]\,e\,;\,+\infty\,[$, $f\,(\,]\,e\,;\,+\infty\,[\,) =]\,0\,;\,e^{-1}\,[$ donc pour tout λ de $]\,0\,;\,e^{-1}\,[$, l'équation $f\,(x) = \lambda$ admet une solution unique b dans $]\,e\,;\,+\infty\,[$.
donc $h(a) = h(b) = \lambda$

3. On place a sur l'axe des abscisses entre 1 et e. On cherche le point de la courbe d'abscisse a. Son ordonnée est $h(a)$. La droite d'équation $y = h(a)$ coupe la courbe en deux points l'un d'abscisse a l'autre d'abscisse b.
Pour lire graphiquement les limites, il suffit donc de faire varier a, et de regarder l'évolution de b.

3. *a*. Quand a tend vers 1 par valeurs supérieures, la droite d'équation $y = h(a)$ coupe la courbe de plus en plus loin donc b devient de plus en plus en grand donc $\lim\limits_{\substack{a \to 1 \\ a > 1}} s(a) = +\infty$.

3. *b*. Quand a tend vers e par valeurs inférieures, la droite d'équation $y = h(a)$ coupe la courbe de plus en plus près du point d'abscisse e donc b devient de plus en plus proche de e donc $\lim\limits_{\substack{a \to e \\ a > e}} s(a) = e$.

3. *c*. Plus a augmente de 1 à e, plus b diminue donc s est strictement décroissante sur $]\,1\,;\,e\,[$.

4. Dans $]\,1\,;\,e\,[$, la seule valeur entière est 2 donc $a = 2$, on vérifie que $b = 4$ en effet : $\ln 4 = 2 \ln 2$ donc $h(4) = h(2)$.
les couples d'entiers distincts solutions de (E) sont donc (2 ; 4) et (4 ; 2).