

Nouvelle Calédonie Mars 2016

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère pour tout réel m , le plan P_m d'équation :

$$\frac{1}{4} m^2 x + (m-1) y + \frac{1}{2} m z - 3 = 0$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m le point A (1 ; 1 ; 1) appartient-il au plan P_m ?

2. Montrer que les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d) de représentation paramétrique : $(d) \begin{cases} x = 12 - 2t \\ y = 9 - 2t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

3. a. Montrer que l'intersection entre P_0 et (d) est un point noté B dont on déterminera les coordonnées.

3. b. Justifier que pour tout réel m , le point B appartient au plan P_m .

3. c. Montrer que le point B est l'unique point appartenant à P_m pour tout réel m .

4. Dans cette question, on considère deux entiers relatifs m et m' tels que $-10 \leq m \leq 10$ et $-10 \leq m' \leq 10$.

On souhaite déterminer les valeurs de m et de m' pour lesquelles P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires.

4. a. Vérifier que P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires.

4. b. Montrer que les plans P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\left(\frac{m m'}{4}\right)^2 + (m-1)(m'-1) + \frac{m m'}{4} = 0$

4. c. On donne l'algorithme suivant :

Variables	m et m' entiers relatifs
Traitement	Pour m allant de -10 à 10 :
	Pour m' allant de -10 à 10 :
	Si $(m m')^2 + 16(m-1)(m'-1) + 4 m m' = 0$
	Alors Afficher $(m ; m')$
	Fin du Pour
	Fin du Pour

Quel est le rôle de cet algorithme ?

4. d. Cet algorithme affiche six couples d'entiers dont $(-4 ; 1)$, $(0 ; 1)$ et $(5 ; -4)$.

Écrire les six couples dans l'ordre d'affichage de l'algorithme.

CORRECTION

1. Le point A (1 ; 1 ; 1) appartient au plan P_m si et seulement si $\frac{1}{4} m^2 x_A + (m-1) y_A + \frac{1}{2} m z_A - 3 = 0$

soit $\frac{1}{4} m^2 + m - 1 + \frac{1}{2} m - 3 = 0$ donc $m^2 + 6m - 16 = 0$ soit $m = -8$ ou $m = 2$. A appartient aux plans P_{-8} et P_2 .

2. Les plans P_1 et P_{-4} ne sont pas parallèles (les coefficients de $x ; y ; z$ ne sont pas proportionnels) donc ils sont sécants suivant une droite (d)

P_1 a pour équation $\frac{1}{4} x + \frac{1}{2} z - 3 = 0$ soit $x + 2z - 12 = 0$

P_{-4} a pour équation $4x - 5y - 2z - 3 = 0$

Soit $M(x ; y ; z)$ un point de l'intersection des plans P_1 et P_{-4} , en posant $z = t$ alors $x + 2t - 12 = 0$ et $4x - 5y - 2t - 3 = 0$ soit $x = -2t + 12$

en remplaçant : $-8t + 48 - 5y - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow -10t + 45 - 5y = 0$ donc $5y = 5(-2t + 9)$ donc $y = -2t + 9$

Les plans P_1 et P_{-4} sont sécants selon la droite (d) de représentation paramétrique : $(d) \begin{cases} x = 12 - 2t \\ y = 9 - 2t \\ z = t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

3. a. P_0 a pour équation : $-y - 3 = 0$ soit $y = -3$

Un point de (d) a pour coordonnées $(12 - 2t ; 9 - 2t ; t)$

Le point de (d) d'ordonnée 3 correspond au paramètre t tel que $9 - 2t = -3$ soit $t = 6$

Il s'agit donc du point B (0 ; -3 ; 6). L'intersection entre P_0 et (d) est le point B.

3. b. Soit m un réel quelconque, P_m a pour équation $\frac{1}{4} m^2 x + (m-1) y + \frac{1}{2} m z - 3 = 0$

$\frac{1}{4} m^2 x_B + (m-1) y_B + \frac{1}{2} m z_B - 3 = (m-1) \times (-3) + \frac{1}{2} m \times 6 - 3 = -3m + 3 + 3m - 3 = 0$

Pour tout réel m , le point B appartient au plan P_m .

3. c. S'il existait un point B' autre que B appartenant à P_m pour tout m , alors B' appartiendrait aussi à P_1 et P_{-4} donc à (d) et aussi à P_0 donc à l'intersection entre P_0 et (d) or l'intersection entre P_0 et (d) est le point B, donc B' n'existe pas.

Le point B est l'unique point appartenant à P_m pour tout réel m .

4. a. Un vecteur normal à P_1 est $\vec{n}_1 (1 ; 0 ; 2)$, un vecteur normal à P_{-4} est $\vec{n}_{-4} (4 ; -5 ; -2)$

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_{-4} = 1 \times 4 + 0 \times (-5) + 2 \times (-2) = 0$ donc \vec{n}_1 et \vec{n}_{-4} sont orthogonaux donc P_1 et P_{-4} sont perpendiculaires.

4. b. Un vecteur normal à P_m est $\vec{n} \left(\frac{m^2}{4} ; m-1 ; \frac{1}{2} m \right)$, un vecteur normal à $P_{m'}$ est $\vec{n}' \left(\frac{m'^2}{4} ; m'-1 ; \frac{1}{2} m' \right)$

les plans P_m et $P_{m'}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$ soit $\left(\frac{m m'}{4} \right)^2 + (m-1)(m'-1) + \frac{m m'}{4} = 0$

4. c. $\left(\frac{m m'}{4} \right)^2 + (m-1)(m'-1) + \frac{m m'}{4} = 0 \Leftrightarrow (m m')^2 + 16(m-1)(m'-1) + 4 m m' = 0$

Cet algorithme détermine par balayages successifs, les différentes valeurs de m et m' telles que $\left(\frac{m m'}{4} \right)^2 + (m-1)(m'-1) + \frac{m m'}{4} = 0$

donc telles que les plans P_m et $P_{m'}$ soient perpendiculaires.

4. d. Les nombres m et m' jouant des rôles symétriques, si $(m ; m')$ est solution alors $(m' ; m)$ est aussi solution donc les autres couples seront (1 ; -4), (1 ; 0) et (-4 ; 5).

Les six couples seront affichés dans cet ordre : (-4 ; 1) ; (-4 ; 5) ; (0 ; 1) ; (1 ; -4) ; (1 ; 0) ; (5 ; -4)