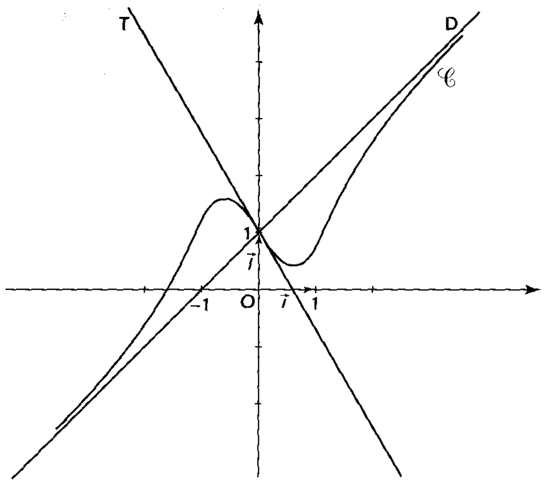
Sur la figure ci-dessous, sont représentées la courbe représentative C dans le repère orthonormal (0; /,/) d'une fonction f définie et dérivable sur E ainsi que son asymptote D et sa tangente C, au point d'abscisse 0.



On sait que le point J(0 ; 1) est centre de symétrie de la courbe C, que l'asymptote D passe par les points K(– 1 ; 0) et J que la tangente C, a pour équation $y = (1 - \mathrm{e})\, x + 1$.

Partie A - Expression de *f*

1. Déterminer une équation de D.
2. On suppose qu'il existe deux réels m et p et une fonction cp définie sur R telle que, pour tout réel x, $f(x) = m\,x + p + \varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.

a. Déterminer m et p.

b. Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) + f(-x) = 2$.

c. En déduire que la fonction φ est impaire puis que la fonction $f\,'$, dérivée de f , est paire.

3. On suppose maintenant que, pour tout réel x : $\varphi(x) = (a\,x + b)\ \mathrm{e}^{-x^2}$ où a et b sont des réels.
Démontrer, en utilisant les données et les résultats précédents, que a = - e et b=0.

Partie B

On considère la fonction f définie sur R par $f(x) = 1 + x - x\ \mathrm{e}^{-x^2}$ et on suppose que la courbe C représente la fonction f dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

1\. *a*. Vérifier que, pour tout réel x : $f\,'(x) = 1 + (2\,x^2 - 1)\ \mathrm{e}^{-x^2+1}$. Calculer $f\,'(0)$.

b. Vérifier que C, est bien la tangente â la courbe C au point d'abscisse 0.
Étudier la position relative de la courbe C et de sa tangente C,

2\. Le graphique suggère l'existence d'un minimum relatif de f sur [0 ; 1] .

a. Démontrer que $f\,''(x)$ est du signe de $6\,x - 4\,x^3$

b. Démontrer que l'équation $f\,'(x) = 0$ admet une solution unique α sur] 0 ; 1].

c. Démontrer que $0{,}51 < \alpha < 0{,}52$.

d. Exprimer $f(a)$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes en α.

CORRECTION

PARTIE A

1\. (JK) est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées donc a une équation de la forme $y = a\,x + b$

Cette droite passe par les points J et K de coordonnées (0 ; 1) et (– 1 ; 0) donc $\begin{cases} 1 = a \times 0 + b \\ 0 = a \times (-1) + b \end{cases}$ donc $a = b = 1$

(JK) a pour équation $y = x + 1$.

2\. *a*. $f(x) - (m\,x + p) = \varphi(x)$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (m\,x + p) = 0$

donc la droite d'équation $y = m\,x + p$ est asymptote à la courbe de f en + ∞, or la droite (JK) est asymptote à C en + ∞.
donc $m = 1$ et $p = 1$ donc $f(x) = x + 1 + \varphi(x)$

2\. *b*. J(a ; b) est centre de symétrie de C donc pour tout x réel : $f(2\,a - x) + f(x) = 2\,b$
Ici $a = 0$ et $b = 1$ donc $f(x) + f(-x) = 2$

2\. *c*. $f(x) = x + 1 + \varphi(x)$ donc $f(-x) = -x + 1 + \varphi(-x)$ en remplaçant dans $f(x) + f(-x) = 2$:
$x + 1 + \varphi(x) - x + 1 + \varphi(-x) = 2$ soit $\varphi(x) + \varphi(-x) = 0$ donc pour tout x réel : $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ donc φ est impaire

f est définie dérivable sur ℝ
$f(x) + f(-x) = 2$ donc en dérivant : pour tout x réel : $f\,'(x) + [-f\,'(-x)] = 0$ soit $f\,'(-x) = f\,'(x)$ donc $f\,'$ est paire

3\. φ est impaire donc $\varphi(-x) = \varphi(x)$ donc pour tout x réel : $(-a\,x + b)\ \mathrm{e}^{-x^2} = -(a\,x + b)\ \mathrm{e}^{-x^2}$

pour tout x réel $e^{-x^2} \neq 0$, donc pour tout x réel : $-ax + b = -ax - b$
soit pour tout x réel : $2b = 0$ donc $b = 0$

$f(x) = x + 1 + a\,x\,e^{-x^2}$
Soit $u(x) = e^{-x^2}$ donc $u'(x) = -2x\,e^{-x^2}$
donc $f'(x) = 1 + a\,e^{-x^2} - 2ax^2\,e^{-x^2}$
La tangente en J a pour coefficient directeur 1 – e donc $f'(0) = 1 - e$ donc $1 + a = 1 - e$ donc $a = -e$
$f(x) = x + 1 - e\,x\,e^{-x^2}$ soit $f(x) = x + 1 - x\,e^{-x^2+1}$

PARTIE B

1. *a*. D'après la première partie : $f'(x) = 1 - a\,e^{-x^2} + 2ax^2\,e^{-x^2}$ avec $a = -e$
soit $f'(x) = 1 - e^{-x^2+1} + 2x^2\,e^{-x^2+1}$ donc $f'(x) = 1 + (2x^2 - 1)\,e^{-x^2+1}$
$f'(0) = 1 - e$

1. *b*. La tangente T au point de la courbe d'abscisse 0 a pour équation $y = f'(0)\,x + f(0)$
$f(0) = 1$ et $f'(0) = 1 - e$ donc T a pour équation $y = (1 - e)\,x + 1$

$f(x) - [(1-e)\,x + 1] = x + 1 - x\,e^{-x^2+1} - (1-e)\,x - 1$
$f(x) - [(1-e)\,x + 1] = (e - e^{-x^2+1})\,x$
$f(x) - [(1-e)\,x + 1] = e\,(1 - e^{-x^2})\,x$

Pour tout x réel, $-x^2 \leq 0$ donc $e^{-x^2} \leq 1$donc si $1 - e^{-x^2} \geq 0$

$f(x) - [(1-e)\,x + 1]$ a le même signe que x donc si $x < 0$, la courbe est en dessous de la tangente
si $x = 0$, point de contact de la courbe et de la tangente
si $x > 0$, la courbe est au dessus de la tangente

2. *a*. $f'(x) = 1 + (2x^2 - 1)\,e^{-x^2+1}$
$f''(x) = 4x\,e^{-x^2+1} + (2x^2 - 1)(-2x\,e^{-x^2+1})$
$f''(x) = 2x\,e^{-x^2+1}[2 - (2x^2 - 1)]$
$f''(x) = 2x\,e^{-x^2+1}(3 - 2x^2)$
Pour tout x réel, $e^{-x^2} > 0$
donc $f''(x)$ a le même signe que $2x\,(3 - 2x^2)$
soit $f''(x)$ a le même signe que $6x - 4x^3$

2. *b*. $3 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ donc $3 - 2x^2$ est positif entre les racines donc sur [0 ; 1]
donc sur] 0 ; 1], $2x\,(3 - 2x^2) > 0$ d'où le tableau de variation de f':

x	0	1
$f''(x)$	0 +	
f'	$1 - e$ ↗	2

La fonction f' est définie continue strictement croissante sur [0 ; 1], $f'([0 ; 1]) = [1 - e ; 2]$
$0 \in [1 - e ; 2]$ donc l'équation $f'(x) = 0$ admet une seule solution α sur [0 ; 1].

2. *c*. $f'(0{,}51) < 0$ et $f'(0{,}52) > 0$ et f' est strictement croissante sur [0 ; 1], donc $0{,}51 < \alpha < 0{,}52$.

2. *d*. $f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 1 + (2\alpha^2 - 1)\,e^{-\alpha^2+1}$
donc $e^{-\alpha^2+1} = \dfrac{-1}{2\alpha^2 - 1}$

$f(\alpha) = 1 + \alpha - \alpha\,e^{-\alpha^2+1}$ donc $f(\alpha) = 1 + \alpha + \dfrac{\alpha}{2\alpha^2 - 1}$

$f(\alpha) = \dfrac{2\alpha^3 + 2\alpha^2 - 1}{2\alpha^2 - 1}$