On désigne par P l'ensemble des entiers naturels premiers. On se propose de résoudre dans P^2 l'équation (E) : $x^2 - y^2 = p\,q$, où p et q sont des entiers naturels premiers.

1. Etudier le cas où $p = q = 2$.
2. Etudier le cas où $q = 2$ et $p > 2$.

3. *a.* On suppose que : $2 < q \leq p$.
Démontrer que y est nécessairement égal à 2.
En déduire que si $p - q \neq 4$, (E) n'a pas de solution.

b. On suppose que : $p - q = 4$.
Démontrer que si (x ; 2) est solution de (E), alors les nombres q, x et p forment une suite arithmétique de raison 2.
En déduire que (E) n'a de solution que si $q = 3$ et $p = 7$.
Quelle est la solution de (E) dans ce cas ?

CORRECTION

1. Si $p = q = 2$, (E) devient : $x^2 - y^2 = 4$ soit $(x - y)(x + y) = 4$
$x + y$ est un entier naturel qui divise 4 donc $x + y \in \{ 1 ; 2 ; 4 \}$
x et y sont deux nombres premiers donc $x \geq 2$ et $y \geq 2$ donc $x + y \geq 4$ donc
$x + y = 4$ et $x - y = 1$

$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$ donc $2\,x = 4 + 1 = 5$ ce qui est impossible dans $\mathbb{N}$.

Si $p = q = 2$, (E) n'a pas de solution.

2. Si $q = 2$ et $p > 2$, (E) devient : $x^2 - y^2 = 2\,p$
soit $(x - y)(x + y) = 2\,p$
Le produit $(x - y)(x + y)$ est pair donc un des termes est pair.
Si x et y sont deux nombres de parités différentes, $x + y$ et $x - y$ sont deux nombres impairs donc x et y sont deux nombres de même parité.
x et y sont deux nombres premiers distincts et $x^2 = y^2 + 4$ donc $x > y$.
x est un nombre premier, $x > y \geq 2$ donc x est impair
x et y étant de même parité, y est impair.
Il existe deux entiers naturels n et n' tels que $x = 2\,n + 1$ et $y = 2\,n' + 1$
$x + y = 2(n + n' + 1)$ et $x - y = 2(n - n')$ donc $x^2 - y^2 = 4(n + n' + 1)(n - n') = 2\,p$ donc $p = 2(n + n' + 1)(n - n')$,
$(n + n' + 1)$ et $(n - n')$ sont deux entiers naturels donc p est un nombre premier pair donc $p = 2$ ce qui est exclu.
Si $p > 2$ et $q = 2$, (E) n'a pas de solution.

3. *a.* $x^2 = y^2 + p\,q$ donc $x^2 > p\,q > 4$ donc $x > 2$ or x est un nombre premier donc $x \geq 3$ donc x est impair.
$(x - y)(x + y) = p\,q$
Le produit $(x - y)(x + y)$ est impair donc les deux termes $(x - y)$ et $(x + y)$ sont impairs.
x et y sont deux nombres premiers, x est impair et y est soit impair soit égal à 2 donc $x + y$ est impair seulement si $y = 2$
Si (E) a des solutions quand $2 < q \leq p$ alors nécessairement $y = 2$.

Si (E) a des solutions quand $2 < q \leq p$ alors nécessairement $y = 2$ alors $x^2 + 4 = p\,q$ donc $(x - 2)(x + 2) = p\,q$, p est un nombre premier qui divise le produit $(x - 2)(x + 2)$ donc soit $p = (x - 2)$ et $q = (x + 2)$ soit $p = (x + 2)$ et $q = (x - 2)$
$p \geq q$ donc $p = x + 2$, $q = x - 2$ donc $p - q = 4$.
Si $p - q \neq 4$, (E) n'a pas de solution.

b. On suppose que : $p - q = 4$.
$p = x + 2$, $q = x - 2$ ou encore $x = q + 2$ et $p = x + 2 = q + 4$ donc si (x ; 2) est solution de (E), les nombres q, x et p forment une suite arithmétique de raison 2.

q est un nombre entier donc q est congru à 0, 1 ou 2 modulo 3.
$q \equiv 0\ (3)$ donc $q = 3$ car q est un nombre premier alors $p = q + 4 = 7$
$q \equiv 1\ (3)$ donc $x \equiv 0\ (3)$ or x est un nombre premier donc $x = 3$ alors $q = x - 2 = 1$ ce qui est exclu car q est un nombre premier
$q \equiv 2\ (3)$ alors $p \equiv 0\ (3)$, p est un nombre premier donc $p = 3$ et $q = p - 4 = -1$ ce qui est exclu
(E) n'a de solution que si $q = 3$ et $p = 7$.

(E) devient $x^2 - y^2 = 3 \times 7$ soit $(x - y)(x + y) = 3 \times 7$
$x + y$ divise 21, les diviseurs de 21 sont 1 ; 3 ; 7 ; 21.
x et y sont des nombres premiers donc $x \geq 2$ et $y \geq 2$ donc $x + y \geq 4$ donc $x + y = 7$ ou $x + y = 21$

$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,x = 7 + 3 \\ 2\,y = 7 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$ et $y = 2$

$\begin{cases} x + y = 21 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,x = 21 + 1 \\ 2\,y = 21 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 11$ et $y = 10$ ce qui est exclu car y n'est pas un nombre premier

La solution de (E) dans ce cas est (5 ; 2).