France juin 2006

Partie A : Question de cours

1. Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.

2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système (S) $\begin{cases} n \equiv 13\ (19) \\ n \equiv 6\ (12) \end{cases}$.

1. Démontrer qu'il existe un couple (u ; v) d'entiers relatifs tel que : $19\,u + 12\,v = 1$.
(On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).
Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12\,v + 6 \times 19\,u$ est une solution de (S).

2. *a.* Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à $\begin{cases} n \equiv n_0\ (19) \\ n \equiv n_0\ (12) \end{cases}$.

b. Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0\ (19) \\ n \equiv n_0\ (12) \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0\ (12 \times 19)$.

3. *a.* Trouver un couple (u ; v) solution de l'équation $19\,u + 12\,v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2. *b.*).

4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.
On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

CORRECTION

Partie A :

1. **Théorème de Bézout :** Deux entiers relatifs x et y sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux entiers u et v tels que $u\,x + v\,y = 1$.

Théorème de Gauss : Soient trois entiers relatifs a, b et c. Si a divise $b\,c$ et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

2. Démonstration du théorème de Bézout :
Soient a et b deux entiers premiers entre eux tels que a divise $b\,c$.
a et b sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Bézout, il existe u et v relatifs tels que $u\,a + v\,b = 1$.
En multipliant cette égalité par c : $u\,a\,c + v\,b\,c = c$.
a divise $b\,c$, donc il existe k relatif tel que $b\,c = k\,a$ donc en remplaçant dans $u\,a\,c + v\,b\,c = c$: $u\,a\,c + k\,a\,v = c$ soit $a\,(u\,c + k\,v) = c$.
Or $u\,c + k\,v$ est un entier relatif (somme et produit de relatifs) donc a divise c.

Partie B :

1. Soit le système (S) $\begin{cases} n \equiv 13\ (19) \\ n \equiv 6\ (12) \end{cases}$, 19 est un nombre premier donc 19 et 12 sont premiers entre eux ; d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $19\,u + 12\,v = 1$.
$N = 13 \times 12\,v + 6 \times 19\,u$ donc $N \equiv 13 \times 12\,v\ [\,19\,]$ or $12\,v = 1 - 19\,u$ donc $N \equiv 13\,(1 - 19\,u)\ [\,19\,]$ donc $N \equiv 13\ [\,19\,]$
Soit $N = 13 \times 12\,v + 6 \times 19\,u$ donc $N \equiv 6 \times 19\,u\ [\,12\,]$ or $19\,u = 1 - 12\,v$ donc $N \equiv 9\,(1 - 12\,v)\ [\,12\,]$ donc $N \equiv 9\ [\,12\,]$
donc N est solution du système S.

2. *a.* Soit n_0 une solution de (S).
n est solution de (S) si et seulement si $\begin{cases} n \equiv 13\ (19) \\ n \equiv 6\ (12) \end{cases}$ or n_0 une solution de (S), donc $\begin{cases} n_0 \equiv 13\ (19) \\ n_0 \equiv 6\ (12) \end{cases}$ donc $\begin{cases} n \equiv n_0\ (19) \\ n \equiv n_0\ (12) \end{cases}$

2. *b.* Si $n \equiv n_0\ (12 \times 19)$ alors en particulier : $\begin{cases} n \equiv n_0\ (19) \\ n \equiv n_0\ (12) \end{cases}$

Réciproquement : Si $\begin{cases} n \equiv n_0\ (19) \\ n \equiv n_0\ (12) \end{cases}$, alors il existe k et k' entiers relatifs tels que $n - n_0 = 19\,k$ et $n - n_0 = 12\,k'$ donc $19\,k = 12\,k'$.

19 divise donc $12\,k'$. 12 et 19 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Gauss, 19 divise k' donc $k' = 12\,k''$, $k'' \in$ Z.
Donc $n - n_0 = 12 \times 19\,k''$ donc $n \equiv n_0\,(12 \times 19)$.

Le système $\begin{cases} n \equiv n_0\ (19) \\ n \equiv n_0\ (12) \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0\ (12 \times 19)$.

3. *a.*

	u	v	$19\,u + 12\,v$	Quotient
	1	0	19	
	0	1	12	1
$L_3 = L_1 - L_2$	1	– 1	7	1
$L_4 = L_2 - L_3$	– 1	2	5	1
$L_5 = L_3 - L_4$	2	– 3	2	2
$L_6 = L_4 - 2\,L_5$	– 5	8	1	2
$L_7 = L_5 - 2\,L_6$	12	– 19	0	

donc $-5 \times 19 + 12 \times 8 = 1$
Un couple $(u\,;\,v)$ solution est : $(-5\,;\,8)$ donc $N = 13 \times 12 \times 8 + 6 \times 19 \times (-5) = 678$.

3. *b.* N = 678 est une solution de (S).
D'après la question **2. *b.***, les solutions de (S) sont tous les nombres n tels que $n \equiv N\ (12 \times 19)$
$12 \times 19 = 228$ donc $n \equiv 678\ (228)$
$678 = 228 \times 2 + 222$ donc $n \equiv 222\ (228)$.
Les solutions de (E') sont les entiers de la forme $228\,k + 222$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

4. Soit n un entier tel que, si on le divise par 12, le reste est 6 et si on le divise par 19, le reste est 13.
n est donc une solution de (S) donc $n \equiv 222\ (228)$.
$0 \leq 222 < 2228$ donc le reste r de la division de n par $228 = 12 \times 19$ est 222 .