**EXERCICE 1 (11 points)**
Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Ajustement affine
Un institut de recherche démographique a étudié l'évolution de la population d'une grande ville.
Les résultats de cette étude sont donnés dans le tableau suivant où $t_i$ désigne le rang de l'année et où $p_i$ désigne l'effectif de la population, en millions d'habitants au cours de la même année.

| Rang de l'année: $t_i$ | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Effectif : $p_i$ | 5 | 5,6 | 6,1 | 6,8 | 7,6 | 8,4 |

On renonce à un ajustement affine pour ce nuage de points. On effectue le changement de variable $y_i = 1\text{n}\, p_i$ (ln désigne le logarithme népérien).
1. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant dans lequel les valeurs approchées sont à arrondir à $10^{-3}$.

| Rang de l'année: $t_i$ | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i = 1\text{n}\, p_i$ | | | | | | |

2. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, le coefficient de corrélation linéaire de la série statistique ($t_i$ ; $y_i$). Arrondir à $10^{-3}$.
3. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, une équation de la droite de régression de $y$ en $t$ sous la forme $y = a\,t + b$, où $a$ et $b$ sont à arrondir à $10^{-3}$.
4. En déduire une expression de $p$ en fonction de $t$ de la forme $p = \alpha\, e^{k\,t}$ où la constante $\alpha$ sera arrondie à $10^{-1}$ et la constante $k$ sera arrondie à $10^{-2}$ .
5. À l'aide du résultat de la question 4., donner une estimation de l'effectif de la population l'année de rang 35. Arrondir à $10^{-1}$.

B. Étude d'une fonction
Soit $f$ la fonction définie pour tout $t$ de [ – 25 ; 35] par $f(t) = 5\, e^{0,02\,t}$.
On note C la courbe représentative de $f$ dans un repère orthogonal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$ ). On prendra comme unités 1 cm pour 5 sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.
1. Étudier les variations de $f$ sur [ – 25 ; 35].
2. Construire la courbe C.
3. *a*) Démontrer que la valeur moyenne de $f$ sur [0 ; 25] est : $V = 10\,(e^{0,5} - 1)$.
*b*) Donner la valeur approchée, arrondie à $10^{-1}$, de V .
4. On admet que, lorsque $0 \leq t \leq 30$, l'effectif de la population de la ville étudiée dans la partie A est donné, en millions d'habitants, l'année de rang $t$, par : $f(t) = 5\, e^{0,02\,t}$.
*a*) Déterminer l'effectif, en millions d'habitants, de la population l'année de rang 28. Arrondir à $10^{-1}$.
*b*) Interpréter, à l'aide d'une phrase, le résultat obtenu à la question 3.*b*).
*c*) Déterminer le rang de l'année au cours de laquelle l'effectif de la population dépassera 9 millions d'habitants.

**EXERCICE 2 (9 points)**
Les trois parties A, B et C de cet exercice, sont indépendantes.

Une entreprise fabrique en grande quantité un certain type de pièces pour de l'équipement informatique.

**A. Probabilités conditionnelles**
Les pièces sont fabriquées par deux machines notées : « machine 1 » et « machine 2 ».
40 % des pièces proviennent de la machine 1 et 60 % de la machine 2.
On admet que 5 % des pièces provenant de la machine 1 sont défectueuses et que 2 % des pièces provenant de la machine 2 sont défectueuses.
On prélève au hasard une pièce dans la production d'une journée des deux machines. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être prélevées.
On appelle A l'événement : « La pièce provient de la machine 1 ».
On appelle B l'événement: « La pièce provient de la machine 2 ».
On appelle D l'événement: « La pièce est défectueuse ».
1. À l'aide des informations contenues dans l'énoncé, donner les probabilités P (A), P (B), $P_A(D)$, et $P_B(D)$.
(On rappelle que $P_A(D) = P(D / A)$ est la probabilité de l'événement D sachant que l'événement A est réalisé).
2. *a*) Calculer $P(A \cap D)$ et $P(B \cap D)$.
*b*) En déduire la probabilité qu'une pièce soit défectueuse.
3. Calculer la probabilité qu'une pièce provienne de la machine 1 sachant qu'elle est défectueuse.

**B. Loi binomiale**
Dans un stock de ces pièces, on prélève au hasard 10 pièces pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 10 pièces.
On note E l'événement: « Une pièce prélevée au hasard dans ce stock est défectueuse ». On suppose que P(E) = 0,03.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 10 pièces, associe le nombre de pièces défectueuses parmi ces 10 pièces.
1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, aucune pièce ne soit défectueuse. Arrondir à $10^{-3}$.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux pièces soient défectueuses. Arrondir à $10^{-3}$.

**C. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale**
Dans un lot de ce type de pièces, on admet que 3,2 % des pièces sont défectueuses. On prélève au hasard 500 pièces de ce lot. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 500 pièces.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 500 pièces, associe le nombre de pièces défectueuses parmi ces 500 pièces.
On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,032$.
1. On considère que la loi suivie par la variable aléatoire Y peut être approchée par la loi normale de moyenne 16 et d'écart-type 3,9. Justifier les paramètres de cette loi normale.
2. On désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne 16 et d'écart-type 3,9.
Déterminer la probabilité que, dans un tel prélèvement, il y ait entre 13 et 19 pièces défectueuses, c'est-à-dire calculer $P(12,5 \leq Z \leq 19,5)$. Arrondir à $10^{-2}$.

**CORRECTION**

**EXERCICE 1 (11 points)**
A. Ajustement affine
1.

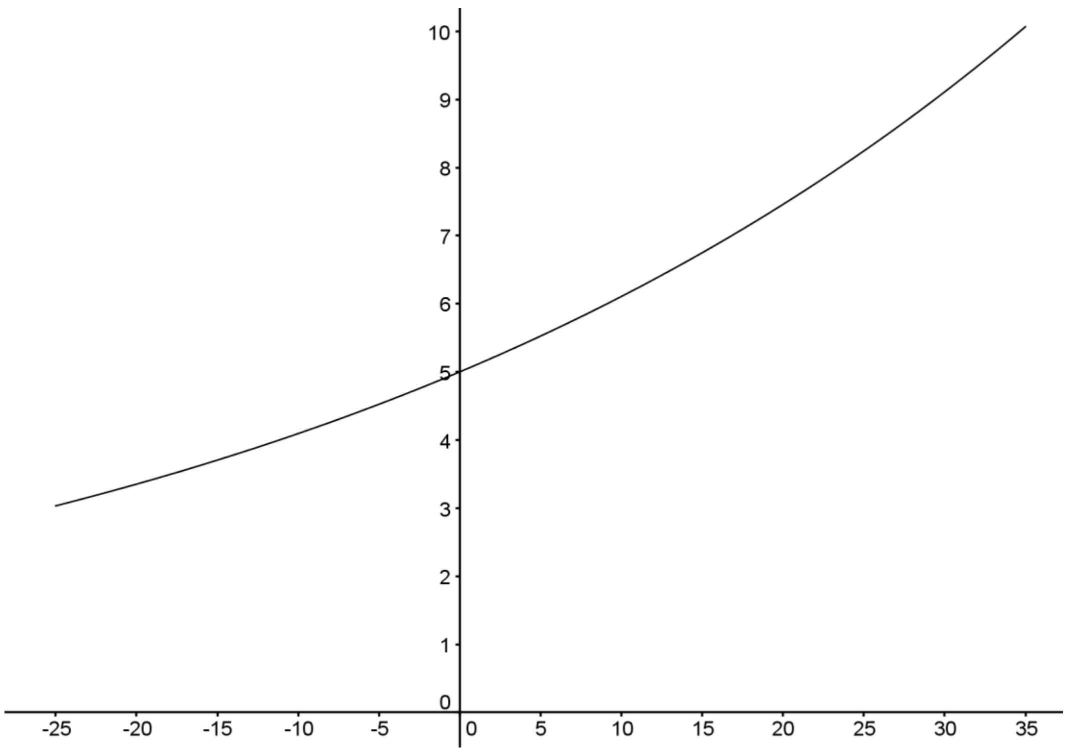
| Rang de l'année: $t_i$ | 0 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i = \ln p_i$ | 1,609 | 1,723 | 1,808 | 1,917 | 2,028 | 2,128 |

2. r = 0,999
3. $y = 0,021\, t + 1,610$
4. $y = \ln p = 0,021\, t + 1,610$ donc $p = e^{0,021\, t + 1,610} = e^{1,610} \times e^{0,021\, t}$ (rappel $e^{a+b} = e^a \times e^b$) donc $p = 5\, e^{0,02\, t}$
5. Une estimation de l'effectif de la population l'année de rang 35 est $p = 5 \times e^{0,02 \times 35}$ soit 10,1 millions d'habitants.

B. Étude d'une fonction
1. Étudier les variations de $f$ sur [ – 25 ; 35].
$f'(t) = 5 \times 0,02\, e^{0,02\, t} = 0,1\, e^{0,02\, t}$. La fonction exponentielle est strictement positive sur R donc $f'(t) > 0$
f est croissante sur [ – 25 ; 35].

| $x$ | – 25 | 35 |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | |
| $f$ | $f(-25)$ ↗ | f(35 |

f(35) = 10,1 et f(– 25) = 2,48
2.




3. *a*) La dérivée de $e^u$ est $u' e^u$, la dérivée de $e^{0,02\, t}$ est $0,02\, e^{0,02\, t}$ donc une primitive de $e^{0,02\, t}$ est $\dfrac{1}{0,02} e^{0,02\, t}$

Une primitive F de $f$ est donc $F(t) = 5 \times \dfrac{1}{0,02} e^{0,02\, t}$ soit $F(t) = 250\, e^{0,02\, t}$

La valeur moyenne $V_m$ de $f$ sur [0 ; 25] est $\frac{1}{25-0}\int_0^{25} f(x)\,dx = \frac{1}{25}[F(25) - F(0)]$

$F(25) = 250\ e^{0,02 \times 25} = 250\ e^{0,5}$ et $F(0) = 250$ donc $V = \frac{1}{25}[\ 250\ e^{0,5} - 250\ ]$,

en mettant 250 en facteur : $V = \frac{1}{25} \times 250\ [\ e^{0,5} - 1]$ donc la valeur moyenne de $f$ sur [0 ; 25] est : $V = 10\ (e^{0,5} - 1)$.

*b*) La valeur approchée, arrondie à $10^{-1}$, de V est donc 16,2

4. *a*) L'effectif, en millions d'habitants, de la population l'année de rang 28 est f(28) = 8,8.

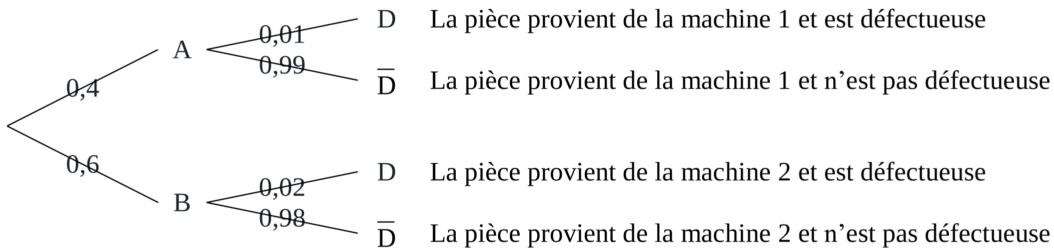
*b*) l'effectif moyen de la population de la ville entre les années de rang 0 et 25 est de 16,2 millions

*c*) $f(t) \geq 9 \Leftrightarrow 5\ e^{0,02\,t} \geq 9 \Leftrightarrow e^{0,02\,t} \geq \frac{9}{5} \Leftrightarrow \ln e^{0,02\,t} \geq \ln 1,8 \Leftrightarrow 0,02\ t \geq \ln 1,8 \Leftrightarrow t \geq \frac{\ln 1,8}{0,02} \Leftrightarrow t \geq 29,28$

Au cours de l'année de rang 29, l'effectif de la population dépassera 9 millions d'habitants.

**EXERCICE 2 (9 points)**

**A. Probabilités conditionnelles**




1. 40 % des pièces proviennent de la machine 1 donc P (A) = 0,40 et 60 % de la machine 2 donc P(B) = 0,60

On admet que 5 % des pièces provenant de la machine 1 sont défectueuses donc $P_A(D) = 0,01$

2 % des pièces provenant de la machine 2 sont défectueuses donc $P_B(D)$ 0,02

2. *a*) $P(A \cap D) = 0,40 \times 0,01 = 0,004$ et $P(B \cap D) = 0,6 \times 0,02 = 0,012$

*b*) $P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0,004 + 0,012 = 0,016$.

3. $P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0,004}{0,016} = 0,25$

<u>Solution avec un tableau :</u>

| | A | B | Total |
|---|---|---|---|
| D | $40 \times 0,01 = 0,4$ | $60 \times 0,02 = 1,2$ | 1,6 |
| $\overline{D}$ | $40 - 0,4 = 39,6$ | $60 - 1,2 = 58,8$ | 98,4 |
| Total | 40 | 60 | 100 |

$P_D(A) = \frac{0,4}{1,6} = 0,25$

**B. Loi binomiale**

1. On a une succession de 10 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :
   - réussite : la pièce est défectueuse ($p = 0,03$)
   - échec : la pièce n'est pas défectueuse ($q = 1 - p = 0,97$)

donc la variable aléatoire $X$ qui compte le nombre de factures erronées, suit une loi binomiale de paramètres (10 ; 0,03).

2. $P(X = 0) = 0,737$
3. $P(X \leq 2) = 0,997$

**C. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale**

1. La loi suivie par la variable aléatoire Y peut être approchée par la loi normale de moyenne = $E(Y) = 500 \times 0,032 = 16$ et d'écart-type $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{500 \times 0,032 \times 0,968} = 3,9$.

2. Soit $T = \frac{Z - 16}{3,9}$, $T$ suit une loi normale centrée réduite

$P(12,5 \leq Z \leq 19,5) = P\left(\frac{12,5-16}{3,9} \leq T \leq \frac{19,5-16}{3,9}\right) = P(-0,9 \leq T \leq 0,9) = 2\ P(T \leq 0,9) - 1 = 2 \times 0,8159 - 1 = 0,6318$