Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'*une de* l'*autre*
Dans un village imaginaire isolé, une nouvelle maladie contagieuse mais non mortelle a fait son apparition.
Rapidement les scientifiques ont découvert qu'un individu pouvait être dans l'un des trois états suivants :
S : « l'individu est sain, c'est-à-dire non malade et non infecté »,
I : « l'individu est porteur sain, c'est-à-dire non malade mais infecté »,
M : « l'individu est malade et infecté ».

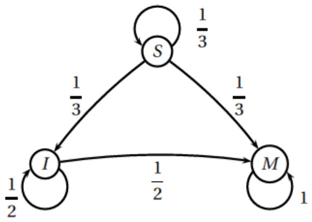
Partie A

Les scientifiques estiment qu'un seul individu est à l'origine de la maladie sur les 100 personnes que compte la population et que, d'une semaine à la suivante, un individu change d'état suivant le processus suivant :

— parmi les individus sains, la proportion de ceux qui deviennent porteurs sains est égale à $\frac{1}{3}$ et la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\frac{1}{3}$,

— parmi les individus porteurs sains, la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\frac{1}{2}$.

La situation peut être représentée par un graphe probabiliste comme ci-dessous.



On note $P_n = (s_n \;\; i_n \;\; m_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines où s_n, i_n et m_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain ou malade la n-ième semaine.
On a alors $P_0 = (0{,}99 \;\; 0 \;\; 0{,}01)$ et pour tout entier naturel n,

$$\begin{cases} s_{n+1} = \frac{1}{3}s_n \\ i_{n+1} = \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n \\ m_{n+1} = \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n + m_n \end{cases}$$

1. Écrire la matrice A appelée *matrice de transition*, telle que pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_n \times A$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $P_n = P_0 \times A^n$.

3. Déterminer l'état probabiliste P_4 au bout de quatre semaines. On pourra arrondir les valeurs à 10^{-2}.
Quelle est la probabilité qu'un individu soit sain au bout de quatre semaines ?

Partie B

La maladie n'évolue en réalité pas selon le modèle précédent puisqu'au bout de 4 semaines de recherche, les scientifiques découvrent un vaccin qui permet d'enrayer l'endémie et traitent immédiatement l'ensemble de la population.

L'évolution hebdomadaire de la maladie après vaccination est donnée par la matrice de transition : $B = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

On note Q_n la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines après la mise en place de ces nouvelles mesures de vaccination. Ainsi, $Q_n = (S_n \;\; I_n \;\; M_n)$ où S_n, I_n et M_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain et malade la n-ième semaine après la vaccination.

Pour tout entier naturel n, on a alors $Q_{n+1} = Q_n \times B$.
D'après la partie A, $Q_0 = P_4$. Pour la suite, on prend $Q_0 = (0{,}01 \;\; 0{,}10 \;\; 0{,}89)$ où les coefficients ont été arrondis à 10^{-2}.

1. Exprimer S_{n+1}, I_{n+1} et M_{n+1} en fonction de S_n, I_n et M_n.

2. Déterminer la constante réelle k telle que $B^2 = kJ$ où J est la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1.
On en déduit que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $B^n = B^2$.

3. *a.* Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2,

$$Q_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

b. Interpréter ce résultat en termes d'évolution de la maladie.
Peut-on espérer éradiquer la maladie grâce au vaccin ?

CORRECTION

Partie A

1. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

P_n A = $(s_n \; i_n \; m_n)$ A = $\begin{pmatrix} \frac{1}{3}s_n & \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n & \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n + m_n \end{pmatrix}$ donc $P_{n+1} = P_n$ A

2. Initialisation : si $n = 1$, $P_0 \times A = P_1$ (voir question précédente quand $n = 0$).

Hérédité montrons que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, si $P_n = P_0 \times A^n$ alors $P_{n+1} = P_0 \times A^{n+1}$.

$P_{n+1} = P_n$ A or $P_n = P_0 \times A^n$ donc $P_{n+1} = P_0 \times A^n \times A$

$P_{n+1} = P_0 \times A^{n+1}$.

La propriété est héréditaire donc pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $P_n = P_0 \times A^n$.

3. $P_4 = P_0 \times A^4$.

$$A^4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} \frac{16}{6^4} & \frac{130}{6^4} & \frac{1150}{6^4} \\ 0 & \frac{81}{6^4} & \frac{1215}{6^4} \\ 0 & 0 & \frac{1296}{6^4} \end{pmatrix}$$

$P_0 \times A^4 = (0{,}99 \;\; 0 \;\; 0{,}01) \begin{pmatrix} \frac{16}{6^4} & \frac{130}{6^4} & \frac{1150}{6^4} \\ 0 & \frac{81}{6^4} & \frac{1215}{6^4} \\ 0 & 0 & \frac{1296}{6^4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15{,}84}{1296} & \frac{1151}{1296} & \frac{1151{,}46}{1296} \end{pmatrix}$ en arrondissant à 10^{-2} près $P_4 = (\,0{,}01 \;\; 0{,}10 \;\; 0{,}89\,)$

La probabilité qu'un individu soit sain au bout de quatre semaines est 0,01.

Partie B

1. $Q_{n+1} = Q_n \times B$ donc $\begin{cases} S_{n+1} = \frac{5}{12}S_n + \frac{5}{12}I_n + \frac{1}{6}M_n \\ I_{n+1} = \frac{1}{4}S_n + \frac{1}{4}I_n + \frac{1}{2}M_n \\ M_{n+1} = \frac{1}{3}S_n + \frac{1}{3}I_n + \frac{1}{3}M_n \end{cases}$

2. $B^2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ donc $B^2 = \frac{1}{3}J$ où J est la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1.

On en déduit par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $B^n = B^2$.

<u>Démonstration non demandée :</u>

Initialisation : si $n = 2$, $B^2 = B^2$.

Hérédité montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, $n \geq 2$, si $B^n = B^2$ alors $B^{n+1} = B^2$.

$B^{n+1} = B^n \times B = B^2 \times B$ or $B^2 = \frac{1}{3}J$ donc $B^2 \times B = \frac{1}{3}J \times B$.

$$\frac{1}{3}J\times B=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{5}{12}&\frac{1}{4}&\frac{1}{3}\\ \frac{5}{12}&\frac{1}{4}&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{6}&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}J\times B=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\left(\frac{5}{12}+\frac{5}{12}+\frac{1}{6}\right)&\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)&\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\\ \frac{1}{3}\left(\frac{5}{12}+\frac{5}{12}+\frac{1}{6}\right)&\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)&\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\\ \frac{1}{3}\left(\frac{5}{12}+\frac{5}{12}+\frac{1}{6}\right)&\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)&\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}J\times B=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$\frac{1}{3}J\times B=\frac{1}{3}\ J$ donc $B^{n+1}=\frac{1}{3}\ J=B^2$ La propriété est héréditaire donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $B^n=B^2$.

3. *a.* On peut montrer que comme $Q_{n+1}=Q_n\times B$ alors $Q_n=Q_0B^n$.
Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $B^n=B^2$ donc $Q_{n+1}=Q_0B^2$
$Q_{n+1}=Q_2$.

$$Q_2=\frac{1}{3}Q_0\times J=(0{,}01\ \ 0{,}10\ \ 0{,}89)\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$Q_2=\begin{pmatrix}\frac{0{,}01+0{,}10+0{,}89}{3}&\frac{0{,}01+0{,}10+0{,}89}{3}&\frac{0{,}01+0{,}10+0{,}89}{3}\end{pmatrix}$$

$$Q_n=Q_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

b. Avec ce vaccin l'évolution de la maladie va donner des groupes équitablement répartis : autant de chance d'être malade ou sain ou infecté ; le vaccin n'éradique pas la maladie.
On pourrait montrer que sans vaccin, la répartition limite serait : tous malades ...