Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$ par : $f(x) = 5\ln(x+3) - x$.

1. *a.* On appelle $f\,'$ la fonction dérivée de la fonction f sur $[\,0\,;+\infty\,[$. Calculer $f\,'(x)$ et étudier son signe sur $[\,0;+\infty\,[$.

b. Donner, dans un tableau, les variations de f sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$.

c. Montrer que, pour tout x strictement positif on a : $f(x) = x\left(5\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)$.

d. En déduire la limite de f en $+\infty$.

e. Compléter le tableau de variation de f sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$.

2. *a.* Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$. On notera α cette solution.

b. Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[\,14\,;15\,]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

c. En déduire le signe de f sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \text{pour tout entier naturel } n \neq 0,\ u_{n+1} = 5\ln(u_n + 3) \end{cases}$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$ par : $g(x) = 5\ln(x+3)$.

En **Annexe 1** on a tracé dans un repère orthonormé la droite **D** d'équation $y = x$ et la courbe **C**, courbe représentative de la fonction g.

1. *a.* Construire sur l'axe des abscisses de **l'Annexe I** les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.

b. Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n).

2. *a.* Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$.

b. Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ où α est défini dans la partie A question 2.*a*.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leq u_n \leq \alpha$$

d. Démontrer alors la conjecture émise à la question 1.*b* de la partie 3.

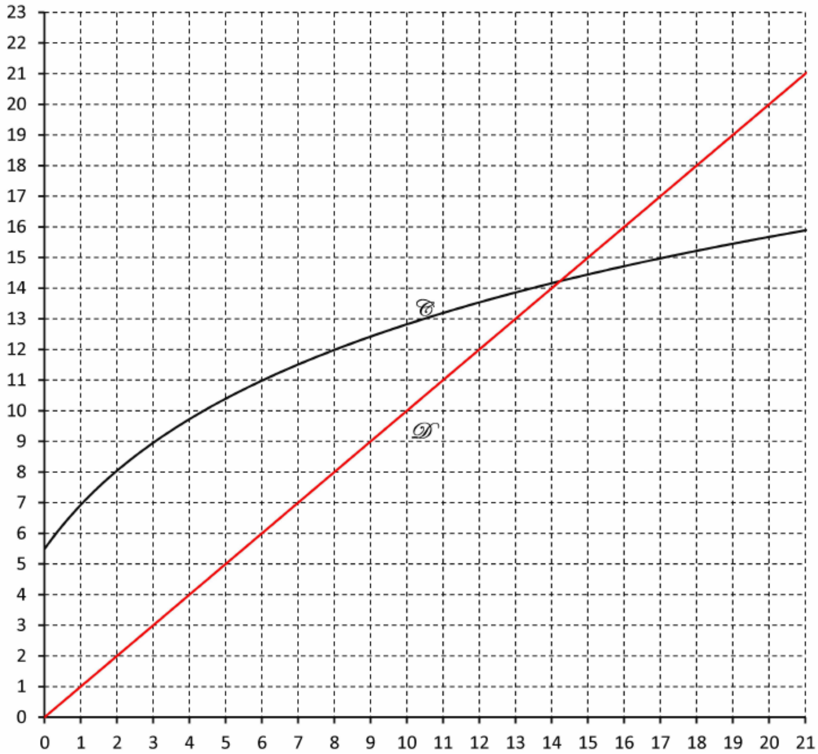
e. En utilisant la question 2.*a* de la partie A, justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

3. On considère l'algorithme suivant :

u prend la valeur 4
Répéter Tant que $u - 14{,}2 < 0$
u prend la valeur de $5\ln(u+3)$
Fin du Tant que
Afficher u

a. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation*. Justifier que cet algorithme se termine.

b. Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).



CORRECTION

Partie A

1. *a.* $f\,'(x) = \dfrac{5}{x+3} - 1 = \dfrac{5-(x+3)}{x+3} = \dfrac{-x+2}{x+3}$

donc si $0 \leq x < 2$ alors $-x + 2 > 0$ donc $f\,'(x) > 0$; si = 2, $f\,'(x) = 0$
si $x > 2$ alors $-x + 2 < 0$ donc $f\,'(x) < 0$

b.

x	0		2		$+\infty$
$f\,'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$5\ln 3$	$\nearrow$	$5\ln 5 - 2$	$\searrow$	

c. pour tout x strictement positif on a :

$$x\left(5\frac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) = 5\ln x - x + 5\ln\left(\frac{x+3}{x}\right)$$
$$= 5\ln x - x + 5\,[\,\ln(x+3) - \ln x\,]$$
$$= 5\ln x - x + 5\ln(x+3) - 5\ln x$$
$$= 5\ln(x+3) - x = f(x)$$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) = -1$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(5\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right) = \ln 1 = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

e.

x	0		2		$+\infty$
$f\,'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$5\ln 3$	$\nearrow$	$5\ln 5 - 2$	$\searrow$	$-\infty$

2. *a.* $5\ln 3 > 0$ et f est strictement croissante sur $[\,0\,;\,2\,]$ donc pour tout x de $[\,0\,;\,2\,]$, $f(x) \geq 5\ln 3 > 0$
La fonction f est définie, continue, strictement décroissante sur $[\,2\,;+\infty\,[$, $f(2) > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[\,2\,;+\infty\,[$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$.

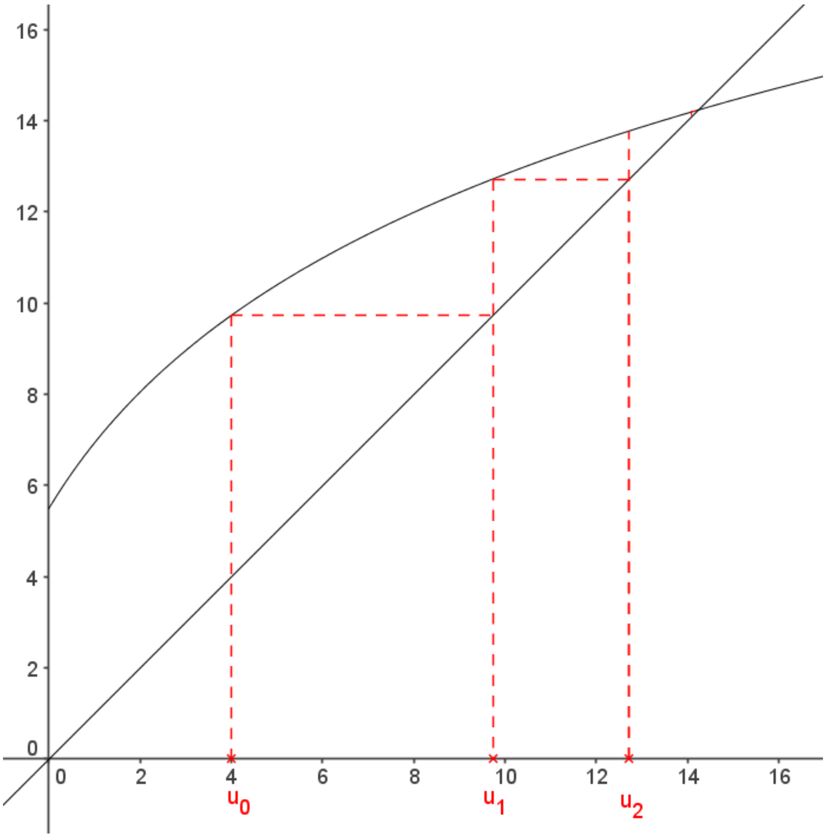
b. $f(14) \approx 0{,}17$ et $f(15) \approx -0{,}55$ et f continue sur $[\,0\,;+\infty\,[$ donc f s'annule sur l'intervalle $[\,14\,;\,15\,]$,
$f(14{,}23) \approx 0{,}003$ et $f(14{,}24) \approx -0{,}004$ donc f s'annule sur l'intervalle $[\,14{,}23\,;\,14{,}24\,]$, et $14{,}23 < \alpha < 14{,}24$

c.

x	0		2		α		$+\infty$
f	$5\ln 3$	$\nearrow$	$5\ln 5 - 2$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$f(x)$		$+$			0	$-$	

Partie B

1. *a.*



b. La suite (u_n) semble être croissante et converger vers le point d'intersection de la courbe **C** et de la droite **D** .

2. *a.* $g'(x) = \dfrac{5}{x+3}$ donc pour tout x positif, $g'(x) > 0$, g est strictement croissante sur $[\ 0\ ;+\infty\ [$.

b. α est solution de l'équation $f(x) = 0$ donc $f(\alpha) = 0$ donc $5\ln(\alpha+3) - \alpha = 0$ soit $5\ln(\alpha+3) = \alpha$ donc $g(\alpha) = \alpha$

c. **Initialisation :** $u_0 = 4$ et $14 \leq \alpha \leq 15$ donc $0 \leq u_0 \leq \alpha$

Hérédité : Montrons que pour tout n de N, si $0 \leq u_n \leq \alpha$ alors $0 \leq u_{n+1} \leq \alpha$

g est strictement croissante sur $[\ 0\ ;+\infty\ [$ donc

si $0 \leq u_n \leq \alpha$ alors $g(0) \leq g(u_n) \leq g(\alpha)$ or $g(0) > 0$, $g(u_n) = u_{n+1}$ et $g(\alpha) = \alpha$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq \alpha$

La propriété est héréditaire donc pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq u_n \leq \alpha$

d. $0 \leq u_n \leq \alpha$ donc $f(u_n) \geq 0$ donc $g(u_n) - u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq u_n$

La suite (u_n) est croissante majorée par α donc est convergente et sa limite est comprise entre u_0 et α.

e. La suite (u_n) est définie par $g(u_n) = u_{n+1}$, cette suite est convergente donc sa limite est solution de l'équation $g(x) = x$ donc de $f(x) = 0$.

L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[\ 0\ ;+\infty\ [$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

3. *a*. Si $u_n - 14{,}2 < 0$ alors $14{,}2 < u_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$ donc à condition de prendre n suffisamment grand, u_n est aussi proche que voulu de α or $14{,}23 \leq \alpha \leq 14{,}24$

Ici on souhaite que $u_n \in [\ 14{,}2\ ;\ \alpha\ ]$, d'après la définition de la limite, il existe un entier n_0 tel que si $n \geq n_0$ alors $u_n \in [\ 14{,}2\ ;\ \alpha\ ]$ donc l'algorithme s'arrête.

b.

n	u_n	$u_n - 14{,}2$	Test	Algorithme
0	4	-10,2	$u_n - 14{,}2 < 0$	continu
1	9,72955	-4,47045	$u_n - 14{,}2 < 0$	continu
2	12,71963	-1,48037	$u_n - 14{,}2 < 0$	continu
3	13,77455	-0,42545	$u_n - 14{,}2 < 0$	continu
4	14,09931	-0,10069	$u_n - 14{,}2 < 0$	continu
5	14,19519	-0,00481	$u_n - 14{,}2 < 0$	continu
6	14,22315	0,02315	$u_n - 14{,}2 > 0$	s'arrête

$n_0 = 6$, l'algorithme affiche 14,22315