Asie juin 2016

Exercice 1 (5 points) Commun à tous/toutes les candidat/e/*s*

Un maraîcher est spécialisé dans la production de fraises

Cet exercice envisage dans la partie A la production de fraises et dans la partie B leur conditionnement.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie : A production de fraises

Le maraîcher produit ses fraises dans deux serres notées A et B : 55 % des fleurs de fraisier se trouvent dans la serre A, et 45 % dans la serre B. Dans la serre A, la probabilité pour chaque fleur de donner un fruit est égale à 0,88 dans la serre B, elle est égale à 0,84.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Proposition 1 :

La probabilité qu'une fleur de fraisier, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit est égale à 0,862.

Proposition 2 :

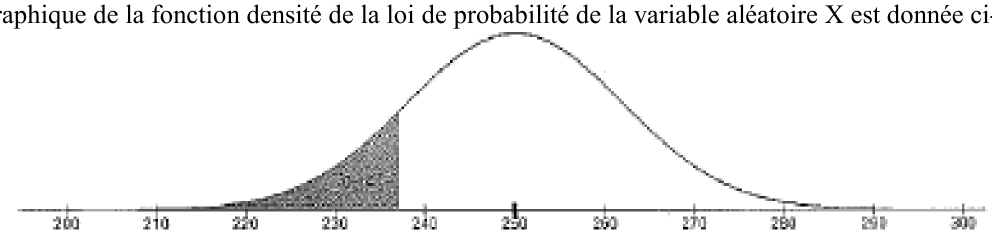
On constate qu'une fleur, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit.

La probabilité qu'elle soit située dans la serre A, arrondie au millième, est égale à 0,43.

Partie B : conditionnement des fraises

Les fraises sont conditionnées en barquettes. La masse (exprimée en gramme) d'une barquette peut lice modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type σ.

La représentation graphique de la fonction densité de la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée ci-après :



1. On donne $P(X \leq 237) = 0,14$. Calculer la probabilité de l'évènement « la masse de la barquette est comprise entre 237 et 263 grammes ».

2. On note Y la variable aléatoire définie par : $Y = \dfrac{X - 250}{\sigma}$

a. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

b. Démontrer que $P\left(Y \leq -\dfrac{13}{\sigma}\right) = 0,14$

c. En déduire la valeur de σ arrondie à l'entier.

3. Dans cette question, on admet que σ vaut 12. On désigne par n et m des nombres entiers.

a. Une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle $[250 - n\,;250 + n]$.

Déterminer la plus petite valeur de n pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.

b. On considère dans cette question qu'une barquette est conforme si sa masse, exprimée en gramme, se trouve dans l'intervalle $[230\ ;\ m]$. Déterminer *b* plus petite valeur de n pour qu'une barquette soit conforme, avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.

Exercice 2 (3 points) Commun à tous/toutes les candidat/e/*s*

Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1. On note f_a la fonction définie sur R par :

$$f_a(x) = a\,\mathrm{e}^{ax} + a$$

On note I(a) l'intégrale de la fonction f, entre 0 et 1 : $I(a) = \displaystyle\int_0^1 f_a\,(x)\,\mathrm{d}x$

1. On pose dans cette question $a = 0$. Déterminer I(0).

2. On pose dans cette question $a = 1$. On étudie donc ici la fonction f_1 définie sur R par : $f_1(x) = \mathrm{e}^x + 1$.

a. Sans étude, représenter graphiquement sur la copie la fonction f_1 dans un repère orthogonal et faire apparaître le nombre I(1).

b. Calculer la valeur exacte de I(1), puis arrondir au dixième.

3. Existe-il une valeur de a pour laquelle I(a) est égale à 2 ? Si oui, en donner un encadrement d'amplitude 10^{-3}.

Exercice 3 (7 points) Commun à tous/toutes les candidat/e/*s*

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en gramme, augmente de 20 % en un jour.

La société met en place le dispositif industriel suivant.

Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 *g* de bactéries sont perdus.

L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A : premier modèle - avec une suite

On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la manière suivante :

$$u_0 = 1000 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 1,2\,u_n - 100.$$

1. *a.* Expliquer en quoi ce modèle correspond à la situation de l'énoncé. On précisera en particulier ce que représente u_n.

b. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

c. On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème posé dans la question précédente.
Recopier et compléter cet algorithme.

Variables	u et n sont des nombres
Traitement	u prend la valeur 1000 n prend la valeur 0 Tant que ……………..faire u prend la valeur ……….. n prend la valeur $n + 1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher ………..

2\. ***a.*** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1000$.

b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie B: second modèle - avec une fonction

On constate qu'en pratique la masse de bactéries dans la cuve ne dépasse jamais 50 kg. Cela conduit à étudier un second modèle dans lequel la masse de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty [$ par :

$$f(t) = \frac{50}{1 + 49^{-0,2t}}$$

où t représente le temps exprimé en jour et et $f(t)$ représente la masse, exprimée en kg, de bactéries au temps t.

1. ***a.*** Calculer $f(0)$.

b. Démontrer que, pour tout réel $t \geq 0$: $f(t) < 50$.

c. Étudier le sens de variation de la fonction f.

d. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Interpréter les résultats de la question 1 par rapport au contexte.

3. En utilisant ce modèle, on cherche à savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.
Résoudre l'inéquation d'inconnue t: $f(t) > 30$.
En déduire la réponse au problème.

Partie C : un contrôle de qualité

Les bactéries peuvent être de deux types : le type A, qui produit effectivement une protéine utile à l'industrie, et le type B, qui ne la produit pas et qui est donc inutile d'un point de vue commercial.
L'entreprise affirme que 80 % des bactéries produites sont de type A.
Pour vérifier cette affirmation, un laboratoire analyse un échantillon aléatoire de 200 bactéries en fin de production. L'analyse montre que 146 d'entre elles sont de type A.
L'affirmation de l'entreprise doit-elle être remise en cause ?

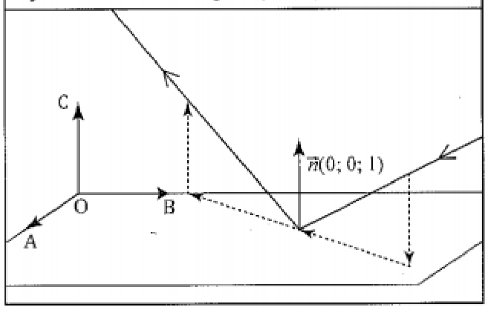
Exercice 4 (5 points) Candidat/e/s n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un catadioptre est un dispositif optique formé de trois miroirs disposés en forme de « coin de cube », les faces réfléchissantes tournées vers l'intérieur. On en trouve dans les réflecteurs de certains véhicules ainsi que dans les appareils de topographie.

Les points O, A, B et C sont des sommets d'un cube, de telle sorte que le repère $\left(O ; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \right)$ soit un repère orthonormé.

On utilisera ce repère dans tout l'exercice.
Les trois miroirs du catadioptre sont représentés par les plans (OAB), (OBC) et (OAC). Les rayons lumineux sont modélisés par des droites.

Vue en perspective cavalière de la réflexion d'un rayon lumineux sur le plan (OAB)



Règles de réflexion d'un rayon lumineux (admises) :

- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}$ $(a ; b ; c)$ est réfléchi par le plan (OAE), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v'}$ $(a ; b ; -c)$
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}$ $(a ; b ; c)$ est réfléchi par le plan (OBC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v'}$ $(-a ; b ; c)$
- lorsqu'un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}$ $(a ; b ; c)$ est réfléchi par le plan (OAC), un vecteur directeur du rayon réfléchi est $\vec{v'}$ $(a ; -b ; c)$

1. *Propriété des catadioptres.*

En utilisant les règles précédentes, démontrer que si un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}$ $(a ; b ; c)$ est réfléchi successivement par les plans (OAB), (OBC) et (OAC), le rayon final est parallèle au rayon initial.

Pour la suite, on considère un rayon lumineux modélisé par une droite d_1 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_1}$ (– 2 ; – 1 ; – 1) qui vient frapper le plan (OAB) au point I_1 (2 ; 3 ; 0). Le rayon réfléchi est modélisé par la droite d_2 de vecteur directeur $\overrightarrow{v_2}$ (– 2 ; – 1 ; 1) et passant par le point I_1.

2. *Réflexion de d_2 sur le plan (OBC).*

a. Donner une représentation paramétrique de la droite d_2.

b. Donner, sans justification, un vecteur normal au plan (OBC) et une équation cartésienne de ce plan.

c. Soit I_2 le point de coordonnées (0 ; 2 ; 1). Vérifier que le plan (OBC) et la droite d_2 sont sécants en I_2.

On note d_3 la droite qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OBC). d_3 est donc la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{v_3}$ (2 ; – 1 ; 1) passant par le point I_2 (0 ; 2 ; 1).

3. *Réflexion de d_3 sur le plan* (OAC).

Calculer les coordonnées du point d'intersection I_3 de la droite d_3 avec le plan (OAC).

On note d_4 la droite qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OAC). Elle est donc parallèle à la droite d_1.

4. *Étude du trajet de la lumière.*

On donne le vecteur $\vec{u}$ (1 ; – 2 ; 0), et on note P le plan défini par les droites d_1 et d_2.

a. Démontrer que le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan P.

b. Les droites d_1, d_2 et d_3 sont-elles situées dans un même plan ?

c. Les droites d_1, d_2 et d_4 sont-elles situées dans un même plan ?

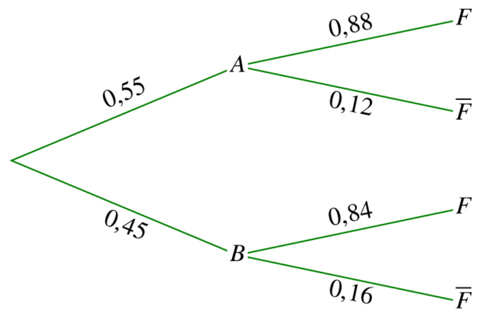
CORRECTION

Exercice 1 (5 points) Commun à tous/toutes les candidat/e/*s*

Partie : A production de fraises

Proposition 1 : VRAIE

Soit les événements A : « les fraises sont produites dans la serre A » ; B : « les fraises sont produites dans la serre B » ; F : « la fleur donne un fruit »



P(F) = P(F ∩ A) + P(F ∩ B) = 0,55 × 0,88 + 0,45 × 0,84 = 0,862.

Proposition 2 : FAUSSE

$P_F(A) = \dfrac{P(F \cap A)}{P(F)} = \dfrac{0,55 \times 0,88}{0,862}$ donc sachant qu'une fleur, choisie au hasard dans cette exploitation, donne un fruit, la probabilité qu'elle soit située dans la serre A, arrondie au millième, est égale à 0,56.

Partie B : conditionnement des fraises

Dans cette partie, les calculs de probabilités sont effectués à la calculette

1. 237 = 250 – 13 et X suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ donc P(X ≤ 250 –13) = P(X ≥ 250 + 13) = 0,14 donc P(237 ≤ X ≤ 263) = 1 – P(X ≤ 237) – P(X ≥ 263) = 1 – 0,28 = 0,72

2. *a.* La variable aléatoire Y suit une loi normale centrée réduite.

b. $P(X \le 237) = P\left(Y \le \dfrac{237-250}{\sigma}\right) = 0,14$ donc $P\left(Y \le -\dfrac{13}{\sigma}\right) = 0,14$

c. $P\left(Y \le -\dfrac{13}{\sigma}\right) = 0,14$ donc $-\dfrac{13}{\sigma} = -1,08$ donc $\sigma = \dfrac{13}{1,08}$ soit $\sigma \approx 12$ valeur arrondie à l'entier.

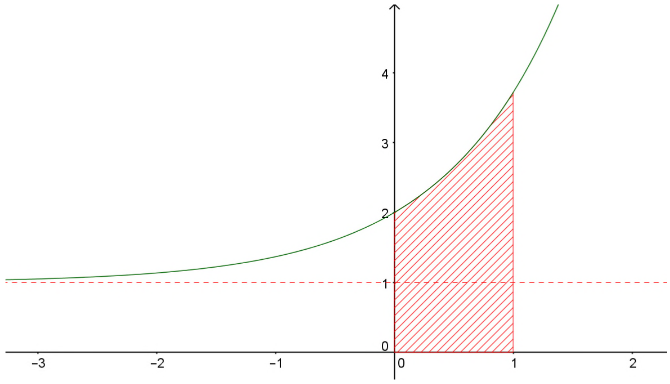
3. *a.* $P(250 - n \le 250 + n) \ge 0,95 \Leftrightarrow P\left(\dfrac{250-n-250}{\sigma} \le Y \le \dfrac{250+n-250}{\sigma}\right) \ge 0,95 \Leftrightarrow P\left(\dfrac{-n}{12} \le Y \le \dfrac{n}{12}\right) \ge 0,95$ donc $\dfrac{n}{12} \ge 1,96$ soit $n \ge 12 \times 1,96$ soit $n \ge 23,52$, n est un nombre entier donc $n \ge 24$. La plus petite valeur de n cherchée est 24.

b. $P(230 \le X \le m) \ge 0,95$ or $P(X \le 230) = 0,048$ et $P(X \le m) = P(230 \le X \le m) + P(X \le 230)$ donc $P(X \le m) \ge 0,95 + 0,048$ donc $m \ge 284,54$, m est un nombre entier donc la plus petite valeur de n cherchée est 285.

Exercice 2 (3 points) **Commun à tous/toutes les candidat/e/*s***

1. $a = 0$ donc $f_0(x) = 0$ donc $I(0) = \int_0^1 0 \, \mathrm{d}x = 0$

2. *a.* I(1) est l'aire du domaine hachuré



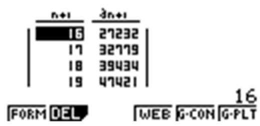
b. $I(1) = \int_0^1 (\mathrm{e}^x + 1) \, \mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x + x \right]_0^1 = \mathrm{e} + 1 - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}$ donc $\mathrm{I}(1) \approx 2{,}2$

3. $I(a) = \int_0^1 (a\,\mathrm{e}^{ax} + x) \, \mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{ax} + a\,x \right]_0^1 = \mathrm{e}^a + a - \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^a + a - 1$.

Soit g la fonction définie par $g(x) = \mathrm{e}^x + x - 1$, g est la somme de fonctions strictement croissantes sur R ($x \to \mathrm{e}^x$ et $x \to x - 1$) donc g est strictement croissante sur R, g est continue sur R, $g(0) = 0$ et $g(1) = \mathrm{e}$ donc $g(0) < 2 < g(1)$ donc l'équation $g(x) = 2$ admet une seule solution a sur [0 ; 1].
$g(0{,}792) < 2$ et $g(0{,}793) < 2$ donc $0{,}792 < a < 0{,}793$, $a \approx 0{,}792$ à 10^{-3} près.

Exercice 3 (7 points) **Commun à tous/toutes les candidat/e/*s***
Partie A : premier modèle - avec une suite
1. *a.* Soit u_n la masse en gramme de bactéries dans le milieu nutritif n jours après l'intétroduction.
Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries donc en grammes $u_0 = 1000$
Dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en gramme, augmente de 20 % en un jour donc le jour suivant on a $1{,}2\ u_n$ grammes de bactéries, durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus donc le nombre de bactéries le jour suivant est $u_{n+1} = 1{,}2\ u_n - 100$.

b. L'entreprise souhaite savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg donc on cherche n tel que $u_n \geq 30\,000$.
La suite semble être croissante.
$u_{16} < 30\,000$ et $u_{16} > 30\,000$. Il faut donc attendre 16 jours pour que la masse de bactéries dépasse 30 kg.



c.

Variables	u et n sont des nombres
Traitement	u prend la valeur 1000 n prend la valeur 0 Tant que $\boldsymbol{u_n \leq 300}$ faire u prend la valeur $\mathbf{1{,}2\ u + 100}$ n prend la valeur $n + 1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher $\boldsymbol{n}$

2\. ***a.*** **Initialisation :** $u_0 = 1000$ donc $u_0 \geq 1000$, la propriété est vérifiée pour $n = 0$.
Hérédité : Montrons pour tout entier naturel n, que si $u_n \geq 1000$ alors $u_{n+1} \geq 1000$
$u_n \geq 1000$ donc $1{,}2\ u_n \geq 1{,}2 \times 1000$ donc $1{,}2\ u_n - 100 \geq 1200 - 100$ soit $u_{n+1} \geq 1100 \geq 1000$
La propriété est héréditaire.
La propriété est initialisée et héréditaire donc pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1000$

b. $u_{n+1} - u_n = 1{,}2\ u_n - 100 - u_n = 0{,}2\ u_n - 100 = 0{,}2\ (u_n - 500)$
Pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1000$, donc $u_n - 500 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$, la suite (u_n) est croissante.

3. On définit la suite (v_n) par : pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 500$.
a. $v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 1{,}2\ u_n - 100 - 500 = 1{,}2\ u_n - 600 = 1{,}2\ (u_n - 500)$ donc $v_{n+1} = 1{,}2\ v_n$
La suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,2 de premier terme $v_0 = u_0 - 500 = 1000 - 500 = 500$

b. $v_n = 1{,}2^n \times 500$ donc $u_n = v_n + 500 = 1{,}2^n \times 500 + 500$

c. $1{,}2 > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}2^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Partie B: second modèle - avec une fonction

On constate qu'en pratique la masse de bactéries dans la cuve ne dépasse jamais 50 kg. Cela conduit à étudier un second modèle dans lequel la masse de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur $[\, 0 \,;\, +\infty\, [$ par :

$$f(t) = \frac{50}{1 + 49^{\ -0,2\,t}}$$

où t représente le temps exprimé en jour et et $f(t)$ représente la masse, exprimée en kg, de bactéries au temps t.

1. *a.* $f(0) = \dfrac{50}{1 + 49^{\ -0,2\times 0}} = 1$

b. $f(t) - 50 = \dfrac{50}{1 + 49^{\ -0,2\,t}} - 50 = \dfrac{50 - 50\,(1 + 49^{\ -0,2\,t}\,)}{1 + 49^{\ -0,2\,t}} = \dfrac{-\,50 \times 49^{\ -0,2\,t}}{1 + 49^{\ -0,2\,t}}$

La fonction exponentielle est strictement positive sur R donc $f(t) - 50 > 0$ donc, pour tout réel $t \geq 0$: $f(t) < 50$.

c. $f\,'(t) = \dfrac{-\,(\,-\,0,2\,) \times 50 \times 49^{\ -0,2\,t}}{(\,1 + 49^{\ -0,2\,t}\,)^{\,2}} = \dfrac{490^{\ -0,2\,t}}{(\,1 + 49^{\ -0,2\,t}\,)^{\,2}}$ donc $f\,'(t) > 0$, f est strictement croissante sur R.

d. $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0,2\,t} = 0$ d'où $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 50$

2. $f(0) = 1$	la masse initiale de bactéries est de 1 kg
Pour tout réel $t \geq 0$: $f(t) < 50$,	la masse de bactéries dans la cuve ne dépasse jamais 50 kg.
f est strictement croissante sur R,	la masse de bactéries dans la cuve est croissante
$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 50$,	à longue échéance, la masse de bactéries dans la cuve tendra vers 50 kg.

3. En utilisant ce modèle, on cherche à savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.

$f(t) > 30 \Leftrightarrow \dfrac{50}{1 + 49^{\ -0,2\,t}} < 30 \Leftrightarrow 50 < 30\,(1 + 49\,\mathrm{e}^{-0,2\,t}) \Leftrightarrow 50 < 30 + 30 \times 49\,\mathrm{e}^{-0,2\,t} \Leftrightarrow 1470\,\mathrm{e}^{-0,2\,t} > 20$

$\mathrm{e}^{-0,2\,t} > \dfrac{20}{1470} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{0,2\,t} > \dfrac{147}{2} \Leftrightarrow 0,2\,t > \ln 73,5 \Leftrightarrow t > 5 \ln 73,5 \Leftrightarrow t \geq 21,49$

Au bout de 22 jours la masse de bactéries dépassera 30 kg.

Partie C : un contrôle de qualité

$n = 200$ donc $n \geq 30$

$p = 0,8$ donc $n\,p = 160 \geq 5$ et $n\,(1 - p) = 40 \geq 5$ donc les conditions sont réunies pour utiliser un intervalle de fluctuation avec un coefficient de confiance de 95 %.

$$\mathrm{I} = \left[\ p - 1,96\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}\ ;\ p + 1,96\sqrt{\frac{p\,(1-p)}{n}}\ \right] = \left[\ 0,8 - 1,96\sqrt{\frac{0,8\,(1 - 0,8)}{200}}\ ;\ 0,8 + 1,96\sqrt{\frac{0,8\,(1 - 0,8)}{200}}\ \right]$$

I = [0,7445 ; 0,8555]

Dans l'échantillon prélevé, la fréquence observée est $f\ \dfrac{146}{200} = 0,73$.

$f \notin \mathrm{I}$ donc l'affirmation de l'entreprise doit être remise en cause avec un risque d'erreur de 5 %.

Exercice 4 (5 points) Candidat/e/*s* n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. *Propriété des catadioptres.*

vecteur initial $\vec{v}\ (a\,;\,b\,;\,c)$	réfléchi par le plan (OAE),	vecteur directeur du rayon réfléchi $\overrightarrow{v_1}\ (\,a\,;\,b\,;\,-\,c)$	réfléchi par le plan (OBC),	vecteur directeur du rayon réfléchi $\overrightarrow{v_2}\ (-\,a\,;\,b\,;\,-\,c)$	réfléchi par le plan (OAC),	vecteur directeur du rayon réfléchi $\overrightarrow{v_3}\ (-\,a\,;\,-\,b\,;\,-\,c)$

$\overrightarrow{v_3} = -\,\vec{v}$ donc si un rayon lumineux de vecteur directeur $\vec{v}\ (a\,;\,b\,;\,c)$ est réfléchi successivement par les plans (OAB), (OBC) et (OAC), le rayon final est parallèle au rayon initial.

2. *Réflexion de d_2 sur le plan (OBC).*

a. Une représentation paramétrique de la droite d_2 est $\begin{cases} x = -\,2\,t + 2 \\ y = -\,t + 3 \\ z = t \end{cases}$.

b. $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ est un vecteur normal au plan (OBC) d'équation cartésienne $x = 0$.

c. $\overrightarrow{v_2}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -\,2$ donc $\overrightarrow{v_2}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} \neq 0$ donc la droite d_2 n'est pas parallèle au plan (OBC) donc est sécante à ce plan.

I_2 est le point de coordonnées (0 ; 2 ; 1) donc $\mathrm{I}_2 \in$ (OBC).

Le point de paramètre $t = 1$ de la droite d_1 a pour coordonnées (0 ; 2 ; 1) donc est I_2 donc le plan (OBC) et la droite d_2 sont sécants en I_2.

3. Le plan (OAC) a pour équation $y = 0$.

Une représentation paramétrique de la droite d_3 est $\begin{cases} x = 2t \\ y = -t + 2 \\ z = t + 1 \end{cases}$

Cherchons le point d'intersection s'il existe de cette droite et du plan (OAC)

Ce point a des coordonnées telles que $\begin{cases} x = 2t \\ y = -t + 2 \\ z = t + 1 \end{cases}$ et $y = 0$ donc $-t + 2 = 0$ soit $t = 2$

Le point d'intersection I_3 de la droite d_3 avec le plan (OAC) a pour coordonnées (4 ; 0 ; 3).

4. *Étude du trajet de la lumière.*

a. $\vec{u}\cdot\vec{v_1} = 1 \times (-2) + (-2) \times (-1) + 0 = -2 + 2 = 0$

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{v_2} = 1 \times (-2) + (-2) \times (-1) + 0 = -2 + 2 = 0$

$\vec{u}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ donc est orthogonal au plan P défini par les droites d_1 et d_2.

Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan P.

b. Les droites d_1, d_2 et d_3 sont situées dans un même plan

$\vec{u}$ (1 ; – 2 ; 0) est un vecteur normal au plan P donc le plan P défini par les droites d_1 et d_2 a une équation de la forme $x - 2y + d = 0$

$I_2 \in d_1 \cap d_2$ donc $x_{I_2} - 2y_{I_2} + d = 0$ soit $0 - 2 \times 2 + d = 0$ donc $d = -4$

Une équation de P est $x - 2y - 4 = 0$.

Une représentation paramétrique de la droite d_3 est $\begin{cases} x = 2t \\ y = -t + 2 \\ z = t + 1 \end{cases}$. Soit M $(2t\,;\,-t+2\,;\,t+1)$ un point quelconque de cette droite, vérifions si pour tout t, ce point appartient à P.

$x_M - 2y_M - 4 = 2t - 2(-t + 2) - 5 = 2t + 2t - 4 - 5 = 4t - 4$ donc si $t \neq 2$, $x_M - 2y_M - 5 \neq 0$ donc $M \notin P$

d_3 perce P en un seul point I_3 donc les droites d_1, d_2 et d_3 ne sont pas situées dans un même plan

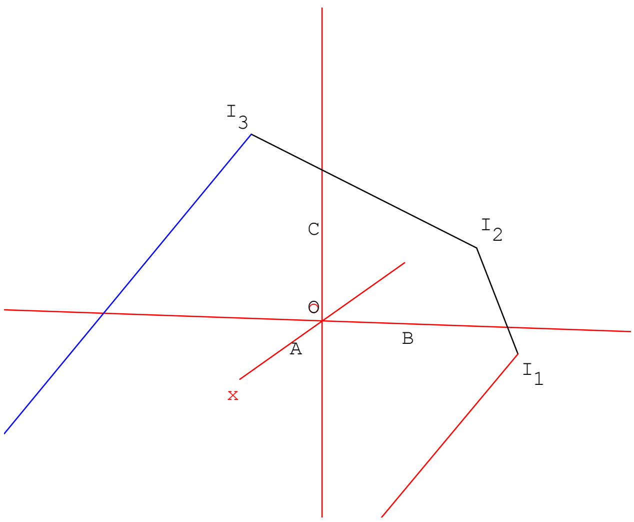
c. Le point d'intersection I_3 de la droite d_3 avec le plan (OAC) a pour coordonnées (4 ; 0 ; 3).

La droite d_4 qui représente le rayon lumineux après réflexion sur le plan (OAC) donc contient le point I_3.

La droite d_4 est parallèle à d_1 donc a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = -2t + 4 \\ y = -t \\ z = -t + 3 \end{cases}$.

Soit M $(-2t + 4\,;\,-t\,;\,-t + 3)$ un point quelconque de cette droite, vérifiions si pour tout t, ce point appartient à P.

$x_M - 2y_M - 5 = -2t + 4 - 2 \times (-t) - 5 = -2t + 4 + 2t - 5 = -1$ donc $x_M - 2y_M - 5 \neq 0$, $M \notin P$ donc les droites d_1, d_2 et d_4 ne sont pas situées dans un même plan.



En rouge d_1 en bleu d_4