Antilles Guyane juin 2003

A. On se propose de résoudre sur R **l'équation différentielle (E) :** $y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$

1. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 2x\,e^{2x} + 1$ est solution de l'équation différentielle (E).

2. On pose : $y = z + h$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle : $z' - 2z = 0$. Résoudre cette dernière équation différentielle et en déduire les solutions de (E).

3. Démontrer qu'il existe une solution et une seule de (E) s'annulant en 0. Elle sera appelée g et étudiée dans la **partie B**.

B. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (2x - 1)\,e^{2x} + 1$.

1. Déterminer le sens de variation de g. Présenter son tableau de variations. En déduire le signe de g sur R.

2. a. Résoudre dans R l'inéquation : $1 - g(x) > 0$.

b. Calculer l'intégrale : $I = \int_0^{\frac{1}{2}} [1 - g(x)]\,dx$.

c. Interpréter graphiquement les résultats des questions **a.** et **b.**.

C. On considère la fonction numérique f définie pour x réel non nul par : $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$, en 0 et en $+\infty$.

2. En déduire que la courbe représentative de f admet une asymptote que l'on précisera.

3. Déterminer le sens de variation de f et donner son tableau de variations (on pourra utiliser la **partie B)**.

4. Soit C la courbe représentative de f dans le repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, avec pour unités : 4 cm sur $(O\,;\vec{i})$ et 2 cm sur $(O\,;\vec{j})$.

Après avoir recopié et complété le tableau ci-dessous avec des valeurs approchées arrondies à 10^{-2} près, construire la courbe C pour des valeurs de x comprises entre -2 et 1.

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	$-0{,}2$	$-0{,}1$	$-0{,}05$	0,05	0,1	0,2	0,5	1
$f(x)$												

5. Soit f_1 la fonction définie par $\begin{cases} f_1(x) = f(x) \text{ si } x \neq 0 \\ f_1(x) = 0 \end{cases}$. Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$. En supposant que f_1 est dérivable en 0, expliquer comment on peut déterminer graphiquement une valeur approchée du nombre dérivé $f_1'(0)$; faire cette lecture graphique. Quel résultat de limite cela permet-il de conjecturer ?

D. On se propose de trouver un encadrement de l'intégrale : $J = \int_{-2}^{-1} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}\,dx$.

Montrer que pour tout x de $[-2\,;-1]$ on a : $-\dfrac{0{,}86}{x} \leq \dfrac{e^{2x} - 1}{x} \leq -\dfrac{0{,}99}{x}$.

En déduire un encadrement de J d'amplitude 0,1.

CORRECTION

Partie A.

1. $h'(x) = 2\,e^{2x} + 2x \times 2\,e^{2x}$ donc Pour tout x réel, $h'(x) - 2h(x) = 2\,e^{2x} + 4x\,e^{2x} - 4x\,e^{2x} - 2 = 2(e^{2x} - 1)$
donc la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = 2x\,e^{2x} + 1$ est solution de l'équation différentielle (E).

2. y est solution de (E) $\Leftrightarrow y' - 2y = 2(e^{2x} - 1) \Leftrightarrow (z + h)' - 2(z + h) = 2(e^{2x} - 1)$
$\Leftrightarrow z' - 2z + h' - 2h = 2(e^{2x} - 1)$ or $h' - 2h = 2(e^{2x} - 1)$
$\Leftrightarrow z' - 2z = 0 \Leftrightarrow z$ est solution de l'équation différentielle : $z' - 2z = 0$.

Les solutions de l'équation différentielle : $z' - 2z = 0$ sont les fonctions de la forme $z(x) = k\,e^{2x}$ avec $k \in \mathbb{R}$

$y = z + h$ et y est solution de (E) $\Leftrightarrow z$ est solution de l'équation différentielle : $z' - 2z = 0 \Leftrightarrow z(x) = k\,e^{2x}$
$\Leftrightarrow y(x) = k\,e^{2x} + 2x\,e^{2x} - 1$ avec $k \in \mathbb{R}$

3. Soit g une solution de (E) vérifiant $g(0) = 0$, g est de la forme $g(x) = k\,e^{2x} + 2x\,e^{2x} + 1$
$g(0) = k + 1$ (puisque $e^0 = 1$) comme $g(0) = 0$ alors $k = -1$ donc $g(x) = -e^{2x} + 2x\,e^{2x} + 1$
ou encore $g(x) = (2x - 1)\,e^{2x} + 1$.
Il existe une solution et une seule de (E) s'annulant en 0.

Partie B. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (2x - 1)\,e^{2x} + 1$.

1. $g'(x) = 2\,e^{2x} + 2(2x - 1)\,e^{2x} = 4x\,e^{2x}$

$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

$g(x) = -e^{2x} + 2x\,e^{2x} + 1$ or $\lim_{x \to -\infty} x\,e^x = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction g est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ donc admet un minimum en 0 donc pour tout x réel, $g(x) \geq g(0)$ soit $g(x) \geq 0$.

2. *a.* $1 - g(x) = -(2x - 1)\,e^{2x}$

La fonction exponentielle étant positive sur $\mathbb{R}$, $1 - g(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2}$

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1$ donc la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe de f en $-\infty$

La courbe est en dessous de cette droite sur $]-\infty\,;\,0{,}5[$, la coupe au point d'abscisse 0,5 et est au-dessus de la droite sur $]\,0{,}5\,;\,+\infty\,[$.

Partie C.

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} - 1 = -1$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Soit $h = 2x$, $\lim\limits_{x \to 0} h = 0$ et $f(x) = 2\dfrac{e^{h} - 1}{h}$ or $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{h} - 1}{h} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$ et $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x} - \dfrac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote$-\infty$ à la courbe représentative de f.

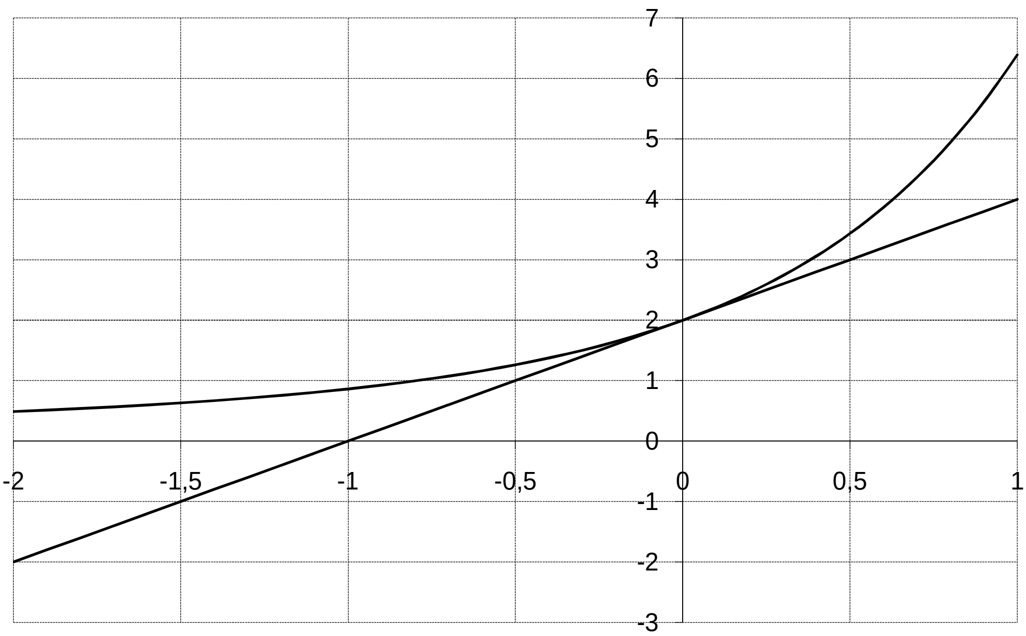
3. f est définie dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = \dfrac{2x\,e^{2x} - (e^{2x} - 1)}{x^{2}} = \dfrac{g(x)}{x^{2}}$

pour tout x réel non nul, $g(x) > 0$ donc $f'(x) > 0$, f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,0\,[$ et $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	
f	0	$\nearrow$	2 ‖ 2	$\nearrow$	$+\infty$

4.

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	$-0{,}2$	$-0{,}1$	$-0{,}05$	0,05	0,1	0,2	0,5	1
$f(x)$	0,49	0,63	0,86	1,26	1,65	1,81	1,90	2,10	2,21	2,46	3,44	6,39



5. Pour déterminer graphiquement une valeur approchée de $f_1'(0)$, il suffit de tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 et de lire le coefficient directeur de cette droite.
Ici $f_1'(0) \approx 2$ donc f_1 est apparemment dérivable en 0