

Les trois parties sont indépendantes. Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} près.

Partie 1

On estime qu'en 2013 la population mondiale est composée de 4,6 milliards de personnes âgées de 20 à 79 ans et que 46,1 % des personnes âgées de 20 à 79 ans vivent en zone rurale et 53,9 % en zone urbaine.

En 2013, d'après la fédération internationale du diabète, 9,9 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone urbaine est atteinte de diabète et 6,4 % de la population mondiale âgée de 20 à 79 ans vivant en zone rurale est atteinte de diabète.

On interroge au hasard une personne âgée de 20 à 79 ans. On note :

R l'évènement : « la personne choisie habite en zone rurale »,

D l'évènement : « la personne choisie est atteinte de diabète ».

1. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.
2. a. Calculer la probabilité que la personne interrogée soit diabétique.
- b. La personne choisie est diabétique. Quelle est la probabilité qu'elle habite en zone rurale ?

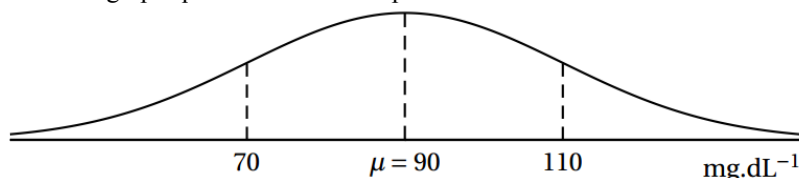
Partie 2

Une personne est dite en hypoglycémie si sa glycémie à jeun est inférieure à 60 mg.dL^{-1} et elle est en hyperglycémie si sa glycémie à jeun est supérieure à 110 mg.dL^{-1} . La glycémie à jeun est considérée comme « normale » si elle est comprise entre 70 mg.dL^{-1} et 110 mg.dL^{-1} . Les personnes ayant un taux de glycémie compris entre 60 et 70 mg.dL^{-1} ne font pas l'objet d'un suivi particulier.

On choisit au hasard un adulte dans cette population. Une étude a permis d'établir que la probabilité qu'il soit en hyperglycémie est $0,052 \times 10^{-3}$ près. Dans la suite on admettra que cette probabilité est égale à 0,052.

On modélise la glycémie à jeun, exprimée en mg.dL^{-1} , d'un adulte d'une population donnée, par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ .

On donne ci-dessous la représentation graphique de la densité de probabilité de la variable aléatoire X .



1. Quelle est la probabilité que la personne choisie ait une glycémie à jeun « normale » ?
2. Déterminer la valeur de σ arrondie au dixième.
3. Dans cette question, on prend $\sigma = 12$. Calculer la probabilité que la personne choisie soit en hypoglycémie.

Partie 3

Afin d'estimer la proportion, pour l'année 2013, de personnes diagnostiquées diabétiques dans la population française âgée de 20 à 79 ans, on interroge au hasard 10 000 personnes.

Dans l'échantillon étudié, 716 personnes ont été diagnostiquées diabétiques.

1. À l'aide d'un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 %, estimer la proportion de personnes diagnostiquées diabétiques dans la population française âgée de 20 à 79 ans.
2. Quel doit être le nombre minimal de personnes à interroger si l'on veut obtenir un intervalle de confiance d'amplitude inférieure ou égale à 0,01 ?

EXERCICE 3 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 POINTS

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et de 2 pièces A et B ayant chacune un côté pile et un côté face. Un jeu consiste à lancer une ou plusieurs fois le dé.

Après chaque lancer de dé, si l'on obtient 1 ou 2, alors on retourne la pièce A, si l'on obtient 3 ou 4, alors on retourne la pièce B et si l'on obtient 5 ou 6, alors on ne retourne aucune des deux pièces.

Au début du jeu, les 2 pièces sont du côté face.

1. Dans l'algorithme ci-dessous, 0 code le côté face d'une pièce et 1 code le côté pile. Si a code le côté de la pièce A à un instant donné, alors $1 - a$ code le côté de la pièce A après l'avoir retournée.

Variables :	a, b, d, s sont des entiers i, n sont des entiers supérieurs ou égaux à 1
Initialisation :	a prend la valeur 0 b prend la valeur 0 Saisir n
Traitement :	Pour i allant de 1 à n faire d prend la valeur d'un entier aléatoire compris entre 1 et 6 Si $d \leq 2$ alors a prend la valeur $1 - a$ sinon Si $d \leq 4$ alors b prend la valeur $1 - b$ FinSi FinSi s prend la valeur $a + b$
	FinPour

a. On exécute cet algorithme en saisissant $n = 3$ et en supposant que les valeurs aléatoires générées successivement pour d sont 1 ; 6 et 4. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme :

variables	i	d	a	b	s
initialisation					
1 ^{er} passage boucle Pour					
2 ^e passage boucle Pour					
3 ^e passage boucle Pour					

b. Cet algorithme permet-il de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile ?

2. Pour tout entier naturel n , on note :
- X_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face »
 - Y_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face »
 - Z_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté pile ».
- De plus on note, $x_n = P(X_n)$; $y_n = P(Y_n)$ et $z_n = P(Z_n)$ les probabilités respectives des évènements X_n , Y_n et Z_n .

a. Donner les probabilités x_0 , y_0 et z_0 respectives qu'au début du jeu il y ait 0, 1 ou 2 pièces du côté pile.

b. Justifier que $P_{X_n}(X_{n+1}) = \frac{1}{3}$.

c. Recopier l'arbre ci-contre et compléter les probabilités sur ses branches, certaines pouvant être nulles :

d. Pour tout entier naturel n , exprimer z_n en fonction de x_n et y_n .

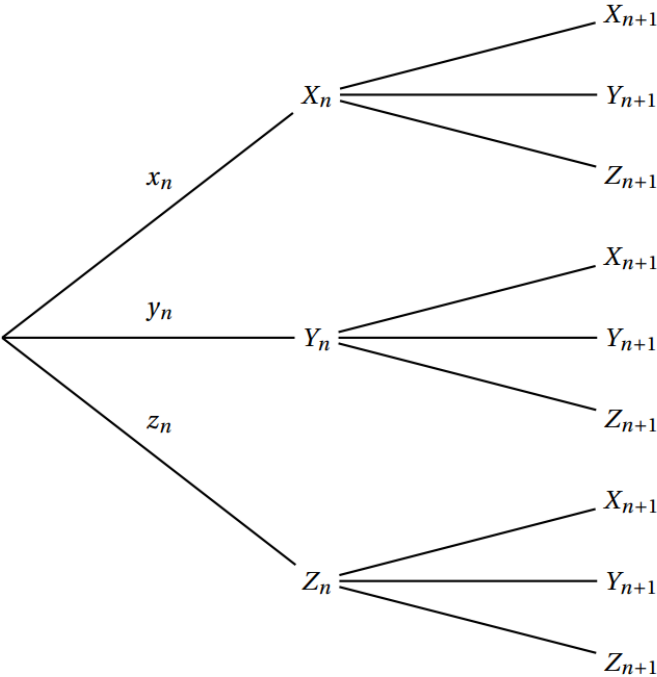
e. En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$y_{n+1} = -\frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}.$$

f. On pose, pour tout entier naturel n , $b_n = y_n - \frac{1}{2}$.

Montrer que la suite (b_n) est géométrique. En déduire que, pour tout entier naturel n , $y_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

g. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$. Interpréter le résultat.

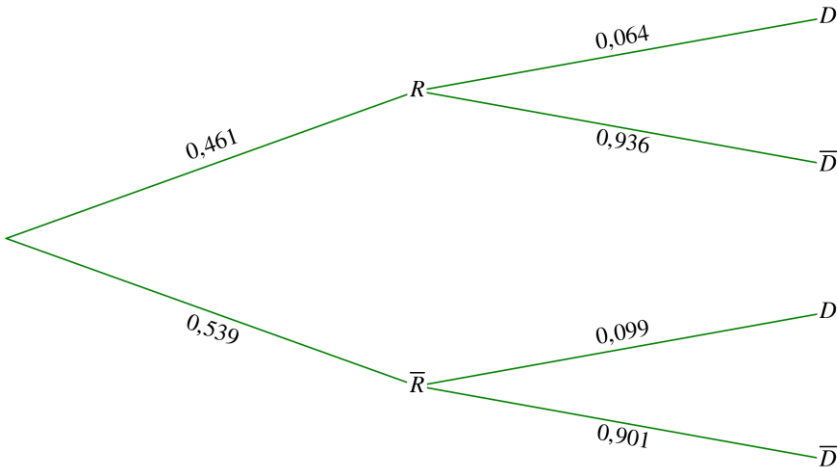


CORRECTION

EXERCICE 1 commun à tous les candidats 6 POINTS

Partie 1

1.



2. a. Calculer la probabilité que la personne interrogée soit diabétique.

$$p(D) = p(R \cap D) + p(\bar{R} \cap D) = 0,461 \times 0,064 + 0,539 \times 0,099 = 0,082865 \text{ soit } 0,083 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

$$b. \quad p_D(R) = \frac{p(R \cap D)}{p(D)} = \frac{0,461 \times 0,064}{0,083} \approx 0,356$$

Si la personne choisie est diabétique, la probabilité qu'elle habite en zone rurale est de 0,356.

Partie 2

1. La probabilité qu'une personne soit en hyperglycémie est 0,052 à 10^{-3} près donc $P(X \geq 110) = 0,052$

La courbe étant symétrique par rapport à la droite $x = 90$ alors $P(X \leq 70) = 0,052$

$P(70 \leq X \leq 110) = 1 - P(X \leq 70) - P(X \geq 110) = 1 - 2 \times 0,052 = 0,896$.

La probabilité que la personne choisie ait une glycémie à jeun « normale » est 0,896.

2. Soit $T = \frac{X - 90}{\sigma}$, T suit une loi normale centrée réduite donc $p(X \leq 70) = p\left(T \leq \frac{70 - 90}{\sigma}\right) = 0,052$

$$p\left(T \leq -\frac{20}{\sigma}\right) = 0,052 \Leftrightarrow 1 - p\left(T \leq \frac{20}{\sigma}\right) = 0,052 \Leftrightarrow p\left(T \leq \frac{20}{\sigma}\right) = 1 - 0,052 = 0,848 \text{ donc } \frac{20}{\sigma} \approx 1,626 \text{ soit } \sigma = \frac{20}{1,626} \approx 12,3$$

3. La probabilité que la personne choisie soit en hypoglycémie est $p(0 \leq X \leq 60)$ soit 0,006 à 10^{-3} près. (fait à la calculatrice)

Partie 3

1. $n = 10\,000$, $f = 0,0716$ donc $nf \geq 5$ et $n(1-f) \geq 5$, les conditions d'utilisation d'un intervalle de confiance sont réunies.

$$I_{10\,000} = \left[0,0756 - \frac{1}{\sqrt{10\,000}} ; 0,0756 + \frac{1}{\sqrt{10\,000}} \right] \text{ soit } [0,0656 ; 0,0856]$$

la proportion de personnes diagnostiquées diabétiques dans la population française âgée de 20 à 79 ans est comprise entre 6,56 % et 8,56 %.

$$2. \quad I_n = \left[0,0756 - \frac{1}{\sqrt{n}} ; 0,0756 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \text{ donc l'amplitude de cet intervalle de confiance est } \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Cette amplitude est inférieure ou égale à 0,01 si et seulement si $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,01$ soit $\frac{2}{0,01} \leq \sqrt{n}$ donc $n \geq 200^2$ soit $n \geq 40\,000$.

EXERCICE 3 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 POINTS

1. a.

variables	i	d		a	b	s
initialisation	☐	☐		0	0	☐
1 ^{er} passage boucle Pour	1	1	$d \leq 2$ donc a prend la valeur $1 - a$, b est invariant	1	0	1
2 ^e passage boucle Pour	2	6	$d > 4$ donc a et b sont invariants	1	1	2
3 ^e passage boucle Pour	3	4	$d \leq 4$ donc a est invariant et b prend la valeur $1 - b$	1	0	1

b. A chaque étape la variable s détermine le nombre de pièces se trouvant du côté pile. Cet algorithme permet donc bien de décider si à la fin les deux pièces sont du côté pile ($s = 2$).

2. a. D'après l'énoncé $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et $z_0 = 0$.

b. X_n l'évènement : « À l'issue de n lancers de dés, les deux pièces sont du côté face » donc si X_n est réalisé, X_{n+1} le sera si les on ne retourne aucune des deux pièces donc si le dé amène le 5 ou le 6 donc $P_{X_n}(X_{n+1}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

c.

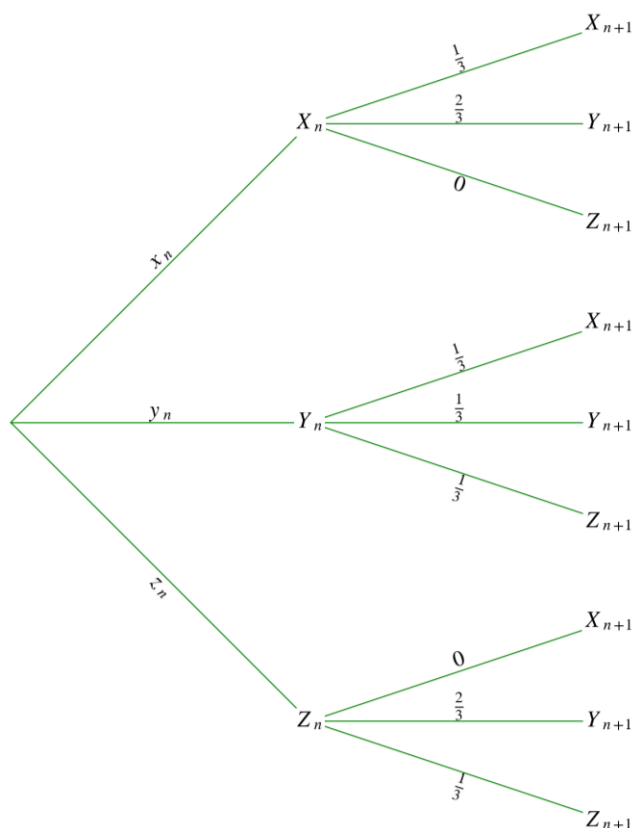
Si les pièces sont du côté face au bout de n lancers alors, au lancer suivant, soit les pièces sont du côté face, soit une est du côté pile et l'autre du côté face

$$\text{donc } p(X_n \cap Y_{n+1}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Si, au lancer n, une pièce est du côté pile et l'autre est du côté face, alors la seule possibilité de conserver un tel état, au suivant $n + 1$, est d'obtenir avec le dé le 5 ou le 6

$$\text{donc } p(Y_n \cap Y_{n+1}) = \frac{1}{3}.$$

$$\text{De même } p(Y_n \cap X_{n+1}) = \frac{1}{3} \text{ et } p(Y_n \cap Z_{n+1}) = \frac{1}{3}.$$



Si, au lancer n , les deux pièces sont du côté pile alors, au lancer suivant $n + 1$, on ne peut avoir que deux possibilités : les deux pièces sont toujours du côté pile ou alors l'une est du côté pile et l'autre du côté face.

Pour garder les pièces du côté pile il faut obtenir 5 ou 6 avec le dé.

$$\text{Donc } p(Z_n \cap Z_{n+1}) = \frac{1}{3} \text{ et } p(Z_n \cap Y_{n+1}) = \frac{2}{3}$$

d. Pour tout entier naturel n , $z_n = 1 - x_n - y_n$.

$$\text{e. } y_{n+1} = p(X_n \cap Y_{n+1}) + p(Y_n \cap Y_{n+1}) + p(Z_n \cap Y_{n+1}) = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}z_n$$

$$\text{or } z_n = 1 - x_n - y_n \text{ donc } y_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}(1 - x_n - y_n), \text{ pour tout entier naturel } n, y_{n+1} = -\frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3}.$$

$$\text{f. } \text{Pour tout entier naturel } n, b_n = y_n - \frac{1}{2} \text{ donc } y_n = b_n + \frac{1}{2}$$

$$b_{n+1} = y_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}y_n + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\left(b_n + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}b_n \text{ donc la suite } (b_n) \text{ est géométrique de raison } q = -\frac{1}{3} \text{ de premier}$$

$$\text{terme } b_0 = y_0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \text{ donc } b_n = b_0 q^n = -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

$$\text{Pour tout entier naturel } n, y_n = b_n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

$$\text{g. } -1 < -\frac{1}{3} < 1 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \frac{1}{2}.$$

Au bout d'un grand nombre de lancers, la probabilité d'obtenir une pièce du côté pile et une du côté face est de 50 %.