Sommaire

2012 3
Antilles–Guyane septembre 2012 3
Asie juin 2012 5
Centres etrangers Juin 2012 6
Liban mai 2012 8
Nouvelle Caledonie mars 2012 9
Pondichery avril 2012 12
2011 13
Amerique du Nord mai 2011 13
Amerique du Sud novembre 2011 14
Antilles Guyane juin 2011 15
Asie Juin 2011 16
Centres etrangers Juin 2011 17
La Reunion juin 2011 18
Liban mai 2011 19
Metropole septembre 2011 20
Metropole Juin 2011 21
Nouvelle Caledonie novembre 2011 22
Nouvelle Caledonie mars 2011 23
Polynesie juin 2011 24
Pondichery avril 2011 25
2010 26
Amerique du Nord juin 2010 26
Antilles-Guyane septembre 2010 26
Asie juin 2010 27
Centres etrangers juin 2010 29
La Reunion septembre 2010 30
Liban juin 2010 31
Metropole La Reunion septembre 2010 32
Polynesie juin 2010 33
Pondichery avril 2010 34
2009 35
Amerique du Nord juin 2009 35
Amerique du Sud novembre 2009 36
Antilles-Guyane septembre 2009 37
Antilles-Guyane juin 2009 38
Asie juin 2009 39
Centres etrangers juin 2009 40
La Reunion juin 2009 41
Liban juin 2009 42
Metropole septembre 2009 43
Metropole juin 2009 44
Nouvelle Caledonie novembre 2009 45
Nouvelle Caledonie juin 2009 46
Polynesie juin 2009 47
Polynesie septembre 2009 48
Pondichery avril 2009 49
2008 50
Amerique du Nord juin 2008 50
Amerique du Sud novembre 2008 51
Antilles Guyane juin 2008 52
Asie juin 2008 53
Centres etrangers juin 2008 54
Liban juin 2008 55
Metropole juin 2008 56
Nouvelle Caledonie novembre 2008 57
Nouvelle- Caledonie mars 2008 58
Polynesie septembre 2008 59
Polynesie juin 2008 60
Pondichery avril 2008 61
2007 62
Amerique du Nord mai 2007 62
Amerique du Sud novembre 2007 63

ANTILLES GUYANE SEPTEMBRE 2007 64
ANTILLES GUYANE JUIN 2007 65
LIBAN JUIN 2007 66
METROPOLE JUIN 2007 67
NOUVELLE CALEDONIE NOVEMBRE 2007.. 68
NOUVELLE CALEDONIE MARS 2007 69
POLYNESIE SEPTEMBRE 2007.. 70
POLYNESIE JUIN 2007... 72
PONDICHERY AVRIL 2007.. 73
2004 74
FRANCE METROPOLITAINE JUIN 2004.. 74
2003 75
METROPOLE JUIN 2003.. 75
2001 76
AMERIQUE DU NORD JUIN 2001 76
METROPOLE SEPTEMBRE 2001... 77

2012

Amérique du sud novembre 2012

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit **P** le plan d'équation cartésienne $2x - y + 3z - 1 = 0$ et soit S le point de coordonnées (1 ; 3 ; 5).

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, et proposer une démonstration de la réponse indiquée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

1. Les points d'intersection du plan **P** avec les trois axes du repère sont les sommets d'un triangle isocèle.

2. La droite δ_1 de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 5 - 4t \\ z = 2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

est incluse dans le plan **P**.

3. La droite δ_2 de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 7 + 4t, \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 7 + 2t \end{cases}$$

est la droite parallèle à la droite δ_1 passant par le point S.

4. Le projeté orthogonal du point S sur le plan **P** a pour coordonnées :

$$\left(-\frac{6}{7}; \frac{55}{14}; \frac{31}{14}\right).$$

5. Le plan **P** coupe la sphère de centre S et de rayon 3.

Antilles–Guyane septembre 2012

$(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal de l'espace.

On note D la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Soit P le plan défini par l'équation $x + y + 2z - 1 = 0$.

Soit S la sphère de centre B $(1 ; -1 ; 0)$ et de rayon 1.

Pour chacune des phrases ci-dessous, une seule des trois propositions est exacte. Dans chaque cas, indiquer la bonne réponse en justifiant soigneusement votre choix.

Il est attribué pour chaque question 0,5 *point si la réponse est exacte et* 0,5 *point si la justification est correcte.*

1. La droite D et le plan P sont :

a. parallèles ;

b. perpendiculaires ;

c. non parallèles et non perpendiculaires.

2. Soit P ′ le plan contenant la droite D et perpendiculaire au plan P. P ′ admet pour équation cartésienne :

a. $-2y + z + 2 = 0$;

b. $2x - z = 0$;

c. $x - y - z = 0$.

3. La droite Δ, intersection du plan P et du plan d'équation $2x - z = 0$, admet pour représentation paramétrique :

a. $\begin{cases} x = t \\ y = -3t + 1 \\ z = 2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

b. $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = -5t + 1 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

c. $\begin{cases} x = t \\ y = -5t + 1 \\ z = 2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

4. L'intersection de la sphère S et du plan P est :

a. un point ;

b. l'ensemble vide ;

c. un cercle.

Asie juin 2012

Les cinq questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse correcte et justifiée rapporte 1 point.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la droite D dont on donne une représentation paramétrique, et le plan P dont on donne une équation cartésienne :

$$D \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = -5 - 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ et } P : 3x + 2y - z - 5 = 0.$$

Affirmation 1 : la droite D est strictement parallèle au plan P.

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

le point A(1 ; 9 ; 0) et le plan P d'équation cartésienne : $4x - y - z + 3 = 0$.

Affirmation 2 : la distance du point A au plan P est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Soit la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = \frac{3}{1 + e^{-2x}}$. On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

Affirmation 3 : la courbe C admet deux asymptotes parallèles à l'axe des abscisses.

4. Pour tout réel x, on pose $F(x) = \int_1^x (2 - t)\, e^{-t}\, dt$.

Affirmation 4 : $F(x)$ est négatif ou nul quelle que soit la valeur du réel x supérieur à 1.

5. On considère l'intégrale $I = \int_1^e t^2 \ln t\, dt$.

Affirmation 5 : la valeur exacte de l'intégrale I est : $\frac{2e^3 + 1}{9}$.

Centres étrangers Juin 2012

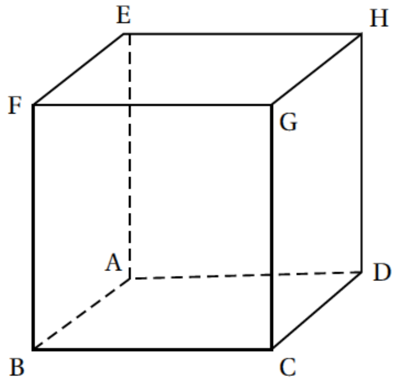
On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.

On se place dans le repère orthonormal $(A ; \overrightarrow{AB} \; \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AE})$.

On considère les points :

$$I\left(1 \; ; \frac{1}{3} ; 0\right), J\left(0 \; ; \frac{2}{3} ; 1\right), K\left(\frac{3}{4} \; ; 0 ; 1\right) \text{ et } L\,(a \; ; 1 \; ; 0)$$

avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle [0 ; 1].



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).

2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases} \quad \text{avec } t' \in \mathbb{R}.$$

3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si et seulement si $a = \frac{1}{4}$.

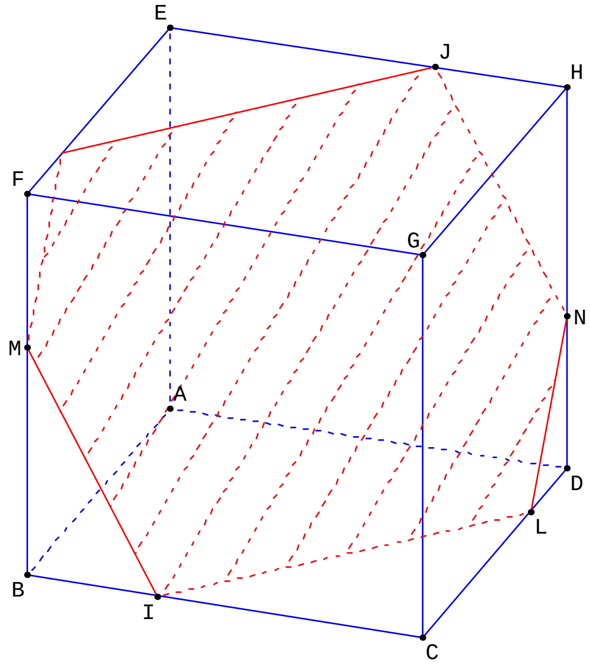
Partie B

Dans toute la suite de l'exercice, on pose $a = \frac{1}{4}$.

Le point L a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\ ; 1 ; 0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

2. La figure ci-dessous fait apparaître l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube ABCDEFGH telle qu'elle a été obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.



On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).

Le but de cette question est de déterminer les coordonnées des points M et N.

a. Prouver que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (8 ; 9 ; 5) est un vecteur normal au plan (IJK).

b. En déduire que le plan (IJK) a pour équation $8\,x + 9\,y + 5\,z - 11 = 0$.

c. En déduire les coordonnées des points M et N.

Liban mai 2012

Les quatre questions sont indépendantes.

Dans cet exercice, pour chaque question, une affirmation est proposée. On demande d'indiquer sur la copie si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte, mais toute trace de recherche sera valorisée.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les droites D_1 et D_2 de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 6 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}, \text{ et} \\ z = 4 - t \end{cases} \begin{cases} x = 8 + 5t' \\ y = 2 - 2t', \quad t' \in \mathbb{R}. \\ z = 6 + t' \end{cases}$$

Affirmation : les droites D_1 et D_2 sont coplanaires.

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(12 ; 7 ; – 13) et B(3 ; 1 ; 2) ainsi que le plan P d'équation $3x + 2y - 5z = 1$.

Affirmation : le point B est le projeté orthogonal du point A sur le plan P.

3. On considère les suites u et v définies, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = \frac{n+1}{n+2} \text{ et } v_n = 2 + \frac{1}{n+2}$$

Affirmation : ces deux suites sont adjacentes.

4. On considère la suite u définie par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$, pour tout entier naturel n.

Affirmation : cette suite est majorée par 3.

Nouvelle Calédonie mars 2012
Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité
VRAI ou FAUX?

Pour chacun des énoncés suivants, indiquer si la proposition correspondante est vraie ou fausse et proposer une justification de la réponse choisie.

1. **Énoncé 1 :** Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite non constante de réels.

Pour tout entier n, on pose $u_n = \sin(a_n)$.

Proposition 1 *: «On peut choisir la suite* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *telle que la suite* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers* $\frac{\sqrt{2}}{2}$. »

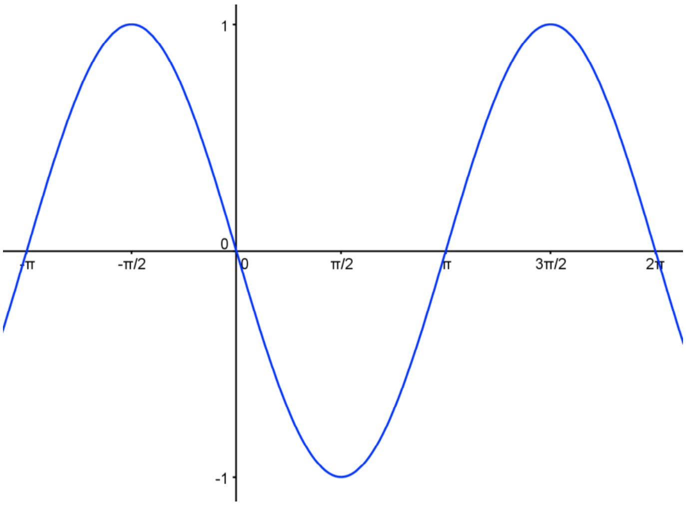
2. **Énoncé 2 :** Dans le plan complexe d'origine O, on considère, pour tout entier naturel non nul n, les points M_n d'affixe $z_n = \mathrm{e}^{\frac{2in\pi}{3}}$.

Proposition 2 *: « Les points O,* M_1 *et* M_{20} *sont alignés. »*

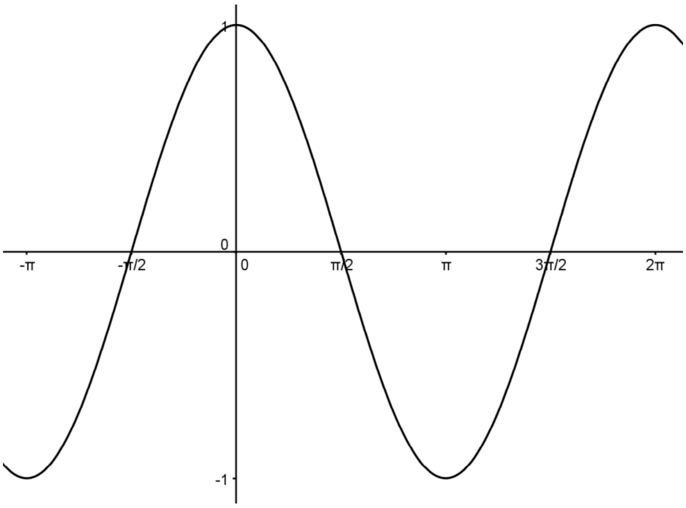
3. **Énoncé 3 :** On considère une fonction f, sa dérivée f' et son unique primitive F s'annulant en $x = 0$. Les représentations graphiques de ces trois fonctions sont données (dans le désordre) par les courbes ci-dessous.

Proposition 3 *: « La courbe* 3 *ci-dessous est la représentation graphique de* f *».*

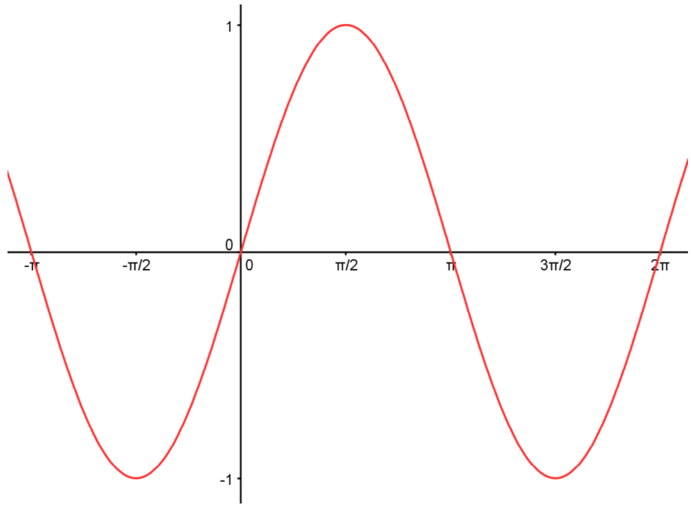
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3

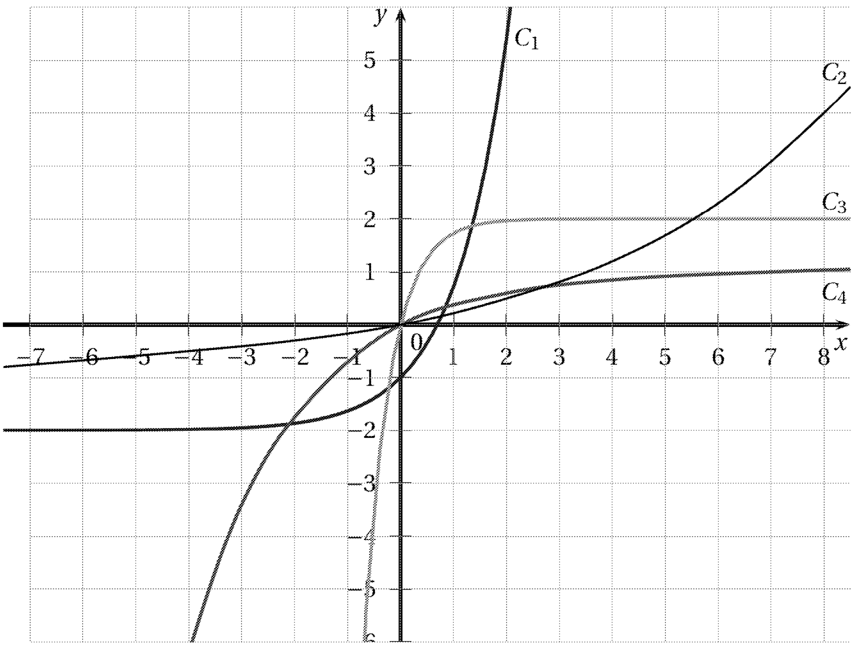


4. **Énoncé 4 :** On considère, dans un repère orthonormé de l’espace, le point A(0 ; 0 ; 3) et le plan P d’équation $2x - y + z = 0$.

Proposition 4 *: « La sphère de centre A et de rayon 2 et le plan P sont sécants. »*

5. **Énoncé 5 :** On considère l’équation différentielle (E) : $y' + 2y = 4$. Parmi les quatre courbes ci-dessous, l’une représente la solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$.

Proposition 5 : « La courbe représentative de la solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ *est la courbe* C_4*. »*



Polynésie juin 2012.
EXERCICE 1 5 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points B (100 ; 100) et C $\left(50 ; \frac{50}{\sqrt{e}}\right)$ et la droite (D) d'équation $y = x$.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative, notée Γ, est donnée en annexe.

On suppose de plus qu'il existe deux réels a et b tels que :

- pour tout x réel, $f(x) = x\,e^{ax+b}$
- les points B et C appartiennent à la courbe Γ.

1\. *a.* Montrer que le couple $(a ; b)$ est solution du système :

$$\begin{cases} 100\,a + b = 0 \\ 50\,a + b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

b. En déduire que, pour tout x réel, $f(x) = x\,e^{0{,}01\,x-1}$.

2\. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3\. *a.* Montrer que pour tout x réel, $f(x) = \dfrac{100}{e} \times 0{,}01\,x\,e^{0{,}01\,x}$

b. En déduire la limite de f en $-\infty$.

4\. Étudier les variations de la fonction f .On donnera le tableau de variations complet.

5\. Étudier la position relative de la courbe Γ et de la droite (D).

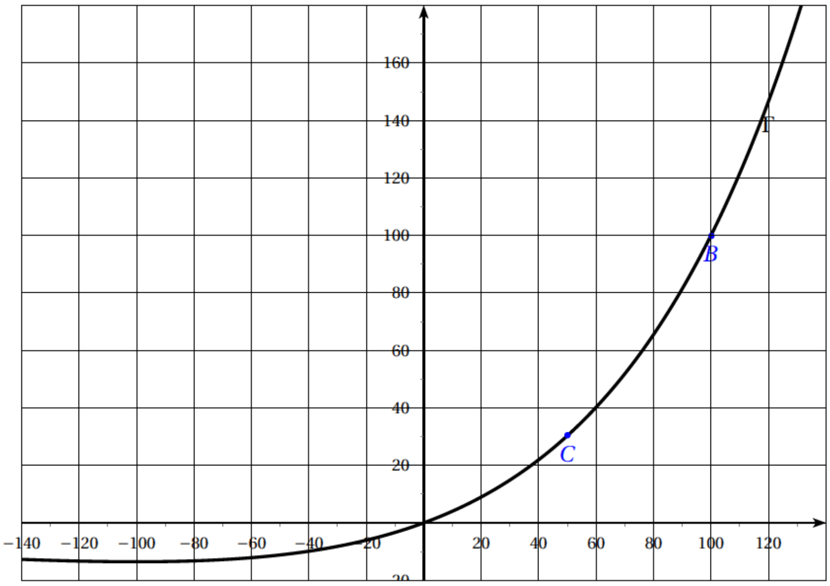
6\. *a.* Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale :

$$\int_0^{100} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

b. On désigne par A l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 100$, la droite (D) et la courbe Γ.

Calculer A.

Annexe de l'exercice 1



Pondichéry avril 2012

Dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère :

- les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations $\mathcal{P}$: $x - y - z - 2 = 0$ et $\mathcal{P}'$: $x + y + 3z = 0$.

- la droite $\mathcal{D}$ ayant pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Une justification est attendue pour chaque réponse.

Proposition 1 : La droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

Proposition 2 : La sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon 2 est tangente au plan $\mathcal{P}$.

Proposition 3 : L'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est la droite Δ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 1 - t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = t' \end{cases}$; $t' \in \mathbb{R}$.

Proposition 4 : Les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont coplanaires.

2011

Amérique du Nord mai 2011

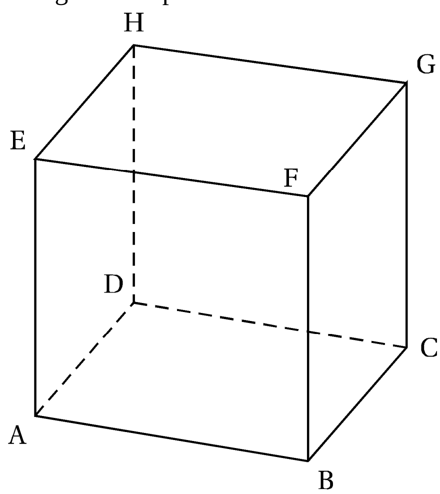
Partie A : Restitution organisée de connaissances

On considère trois points A, B et C de l'espace et trois réels a, b et c de somme non nulle.

Démontrer que, pour tout réel k strictement positif, l'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\| a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB} + c\,\overrightarrow{MC} \right\| = k$ est une sphère dont le centre est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs a, b et c.

Partie B

On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1 représenté ci-dessous.



Il n'est pas demandé de rendre le graphique avec la copie.

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (1 ; 0 ; 1) est un vecteur normal au plan (BCE).

2. Déterminer une équation du plan (BCE).

3. On note (Δ) la droite perpendiculaire en E au plan (BCE).

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ).

4. Démontrer que la droite (Δ) est sécante au plan (ABC) en un point R, symétrique de B par rapport à A.

5. a. Démontrer que le point D est le barycentre des points R, B et C affectés des coefficients respectifs 1, − 1 et 2.

b. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que $\left\| \overrightarrow{MR} - \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC} \right\| = 2\sqrt{2}$.

c. Démontrer que les points B, E et G appartiennent à l'ensemble (S).

d. Démontrer que l'intersection du plan (BCE) et de l'ensemble (S) est un cercle dont on précisera le rayon.

Amérique du Sud novembre 2011

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le point A de coordonnées $(-1 ; -1 ; 1)$ et les droites D et D' de représentations paramétriques : D : $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$ D' : $\begin{cases} x = 3t' \\ y = t' + 2 \\ z = 3t' - 2 \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$

Proposition 1 : « Le point A appartient à la droite D ».

Proposition 2 : « Le plan perpendiculaire à la droite D passant par le point O a pour équation : $2x - 3y + z = 0$ ».

Proposition 3 : « Les droites D et D' sont orthogonales ».

Proposition 4 : « Les droites D et D' sont coplanaires ».

Proposition 5 : « La distance du point A au plan d'équation $2x - 3y + z = 0$ est $\frac{\sqrt{14}}{7}$.

Antilles Guyane juin 2011

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la droite D passant par le point A de coordonnées $(3 ; -4 ; 1)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\,(1 ; -3 ; 1)$.
On considère la droite D' dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

On admet qu'il existe une unique droite Δ perpendiculaire aux droites D et D'.
On se propose de déterminer une représentation paramétrique de cette droite Δ et de calculer la distance entre les droites D et D', distance qui sera définie à la question **5.**
On note H le point d'intersection des droites D et Δ, H' le point d'intersection des droites D' et Δ.
On appelle P le plan contenant la droite D et la droite Δ. On admet que le plan P et la droite D' sont sécants en H'. Une figure est donnée en **annexe 2**.

1. On considère le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(1 ; 0 ; -1)$. Démontrer que $\vec{w}$ est un vecteur directeur de la droite Δ.

2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3 ; 2 ; 3)$.

a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan P.

b. Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est :
$3x + 2y + 3z - 4 = 0$.

3. *a.* Démontrer que le point H' a pour coordonnées $(-1 ; 2 ; 1)$.

b. En déduire une représentation paramétrique de la droite Δ.

4. *a.* Déterminer les coordonnées du point H.

b. Calculer la longueur HH'.

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
L'objectif de cette question est démontrer que, pour tout point M appartenant à D et tout point M' appartenant à D', $MM' > HH'$.

a. Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ peut s'écrire comme la somme de $\overrightarrow{HH'}$ et d'un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{HH'}$.

b. En déduire que $\left\| \overrightarrow{MM'} \right\|^2 \geq \left\| \overrightarrow{HH'} \right\|^2$ et conclure.

La longueur HH' réalise donc le minimum des distances entre un point de D et un point de D'. On l'appelle distance entre les droites D et D'.

Asie Juin 2011

On considère un cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1. On note I le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH).

1. On se place dans le repère (D ; $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DH}$).

Dans ce repère, les sommets du cube ont pour coordonnées :

A(1 ; 0 ; 0) B(1 ; 1 ; 0) C(0 ; 1 ; 0) D(0 ;0 ; 0)
E(1 ;0 ; 1) F(1 ; 1 ; 1) C(0 ; 1 ; 1) H(0 ;0 ; 1)

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (AFH).

c. En déduire les coordonnées du point I, puis montrer que le point I est le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH).

d. Vérifier que la distance du point E au plan (AFH) est égale à $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

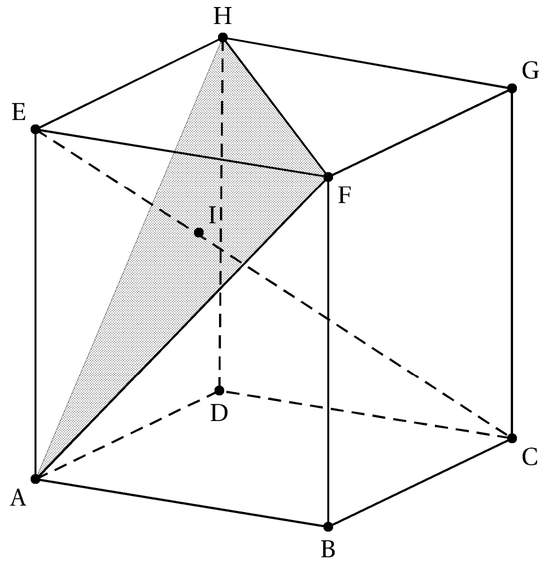
e. Démontrer que la droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF). Que représente le point I pour le triangle AFH?

2. *Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Définitions :

- un tétraèdre est dit de type 1 si ses faces ont même aire ;
- il est dit de type 2 si les arêtes opposées sont orthogonales deux à deux ;
- il est dit de type 3 s'il est à la fois de type 1 et de type 2.

Préciser de quel(s) type(s) est le tétraèdre EAFH.



Centres étrangers Juin 2011

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH d'arête 1.

On désigne par I et J les milieux respectifs des arêtes [BC] et [CD].

Soit M un point quelconque du segment [CE].

Dans tout l'exercice, on se place dans le repère orthonormal $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. *a.* Donner, sans justification, les coordonnées des points C, E, I et J.

b. Justifier l'existence d'un réel t appartenant à l'intervalle [0 ; 1], tel que les coordonnées du point M soient $(1-t ; 1-t ; t)$.

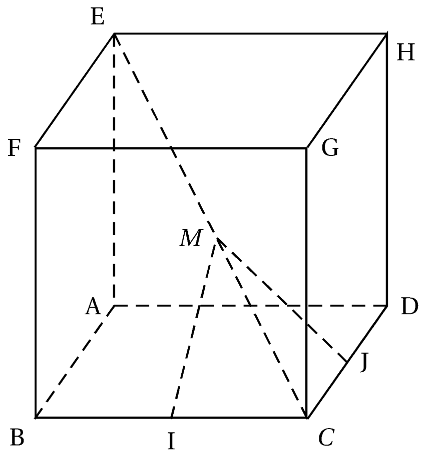
2. *a.* Démontrer que les points C et E appartiennent au plan médiateur du segment [IJ].

b. En déduire que le triangle MIJ est un triangle isocèle en M.

c. Exprimer IM^2 en fonction de t.

3. Le but de cette question est de déterminer la position du point M sur le segment [CE] pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ est maximale.

On désigne par θ la mesure en radian de l'angle $\widehat{IMJ}$.



a. En admettant que la mesure θ appartient à l'intervalle [0 ; π], démontrer que la mesure θ est maximale lorsque $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est maximal.

b. En déduire que la mesure est maximale lorsque la longueur IM est minimale.

c. Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par : $f(t) = 3t^2 - t + \frac{1}{4}$.

d. En déduire qu'il existe une unique position M_0 du point M sur le segment [EC] telle que la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ soit maximale.

e. Démontrer que le point M ' est le projeté orthogonal du point I sur le segment [EC].

La Réunion juin 2011

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.
Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$.

On désigne par P le plan d'équation $2x+3y-z+4=0$ et, par A et B les points de coordonnées respectives $(1\,;2\,;-4)$ et $(-3\,;4\,;1)$.

1. Soit D la droite ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x=-8+2t \\ y=7-t \\ z=6+t \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}.$$

- Le plan P et la droite D sont sécants.
- Le plan P et la droite D n'ont aucun point en commun.
- La droite D est incluse dans le plan P.
- Aucune des trois affirmations précédentes n'est vraie.

2. On note P' le plan d'équation $x+4y-3z+4=0$.

- Les plans P et P' sont parallèles et distincts.
- Les plans P et P' sont confondus.
- Les plans P et P' sont sécants suivant une droite de vecteur directeur $-\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$.
- Les plans P et P' sont sécants suivant une droite de vecteur directeur $-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

3. L'ensemble des points M de l'espace qui sont équidistants des points A et B est :

- une droite passant par le point C de coordonnées $\left(-1\,;3\,;-\dfrac{1}{2}\right)$,
- une sphère de rayon $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$
- le plan d'équation $-4x+2y+5z-\dfrac{5}{2}=0$
- le plan d'équation $-4x+2y+5z+\dfrac{5}{2}=0$.

4. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right\|=5$ est :

- une sphère dont le centre a pour coordonnées $\left(-5\,;5\,;\dfrac{7}{2}\right)$,
- une sphère dont le centre a pour coordonnées $\left(-5\,;-5\,;-\dfrac{7}{2}\right)$,
- le plan d'équation $-4x+2y+5z-5=0$,
- le plan d'équation $-4x+2y+5z+\dfrac{5}{3}=0$.

Liban mai 2011

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), on donne les trois points :

A (1 ; 2 ; − 1), B (− 3 ; − 2 ; 3) et C (0 ; − 2 ; − 3)

1. a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ (2 ; − 1 ; 1) est un vecteur normal au plan (ABC).

2. Soit (*P*) le plan dont une équation cartésienne est $x + y - z + 2 = 0$.

Démontrer que les plans (ABC) et (*P*) sont perpendiculaires.

3. On appelle G le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, − 1) et (C, 2).

a. Démontrer que la droite (CG) est orthogonale au plan (*P*).

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CG).

d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection du plan (*P*) avec la droite (CG).

4. Démontrer que l'ensemble (*S*) des points *M* de l'espace tels que $\left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC} \right\| = 12$ est une sphère dont on déterminera les éléments caractéristiques.

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection du plan (*P*) et de la sphère (*S*).

Métropole septembre 2011

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

On désigne par *a, b, c, d* quatre réels tels que le vecteur $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ soit différent du vecteur nul.

On appelle *P* le plan d'équation $a x + b y + c z + d = 0$.

Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan *P*, c'est-à-dire que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points quelconques du plan *P*.

Partie B - Questionnaire à choix multiples

Pour chaque question, trois réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie ainsi que la justification de ce choix.

Il est attribué 1 *point si la réponse est exacte et justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.*

Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

On désigne par *P* le plan d'équation cartésienne $2x - y + 3z = 0$ et par A et B les deux points du plan *P* de coordonnées respectives (1 ; 2 ; 0) et (0 ; 3 ; 1).

1. Soient C, D, E les points de coordonnées respectives (1 ; 1 ; − 1), (− 1 ; 4 ; 2), (1 ; 5 ; 1).

- **a.** Les points A, B, C définissent le plan P.
- **b.** Les points A, B, D définissent le plan P.
- **c.** Les points A, B, E définissent le plan P.

2. La droite *D* est définie par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- **a.** La droite *D* est perpendiculaire au plan *P*.
- **b.** La droite *D* est strictement parallèle au plan *P*.
- **c.** La droite *D* est incluse dans le plan *P*.

3. Soit *S* la sphère de centre Ω, de coordonnées (2 ; 5 ; 1), et de rayon $\frac{1}{2}$.

L'ensemble des points communs à la sphère *S* et au plan *P* est :

- **a.** vide,
- **b.** constitué d'un seul point,
- **c.** un cercle.

Métropole Juin 2011

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Partie A – Restitution organisée de connaissances

On désigne par P le plan d'équation $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ et par M_0 le point de coordonnées $(x_0 ; y_0 ; z_0)$.

On appelle H le projeté orthogonal du point M_0 sur le plan P .

On suppose connue la propriété suivante :

Propriété : Le vecteur $\vec{n} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}$ est un vecteur normal au plan P.

Le but de cette partie est de démontrer que la distance $d(M_0, P)$ du point M_0 au plan P , c'est-à-dire la distance M_0H, est telle que :

$$d(M_0, P) = \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c\,z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

1. Justifier que $|\overrightarrow{M_0H}.\vec{n}| = M_0H\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

2. Démontrer que $\overrightarrow{M_0H}.\vec{n} = -a\,x_0 - b\,y_0 - c\,z_0 - d$

3. Conclure.

Partie B

On désigne par A, B, C, F les points de coordonnées respectives (4 ; 1 ; 5), (− 3 ; 2 ; 0), (1 ; 3 ; 6), (− 7 ; 0 ; 4).

1. a. Démontrer que les points A, B, C définissent un plan P et que ce plan a pour équation cartésienne $x + 2\,y - z - 1 = 0$.

b. Déterminer la distance d du point F au plan P .

2. Le but de cette question est de calculer la distance d par une autre méthode.

On appelle Δ la droite qui passe par le point F et qui est perpendiculaire au plan P .

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

b. Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point F sur le plan P .

c. Retrouver le résultat de la question 1. b.

3. Soit S la sphère de centre F et de rayon 6.

a. Justifier que le point B appartient à la sphère S .

b. Préciser le centre et déterminer le rayon du cercle C , intersection de la sphère S et du plan P .

Nouvelle Calédonie novembre 2011

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$.

On considère les points : A(0 ; 0 ; 2), B(0 ; 4 ; 0) et C(2 ; 0 ; 0).

1. a. Vérifier qu'une équation du plan (ABC) est : $2x + y + 2z = 4$.

b. Calculer la distance du point O au plan (ABC).

2. a. Déterminer une équation du plan P passant par A et orthogonal à la droite (BC).

b. Soit Δ la droite intersection du plan P et du plan (ABC). Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ. Quel rôle joue cette droite dans le triangle ABC?

3. a. Soit Δ' la médiane issue de B du triangle ABC.

Montrer qu'une équation paramétrique de Δ' dans le triangle ABC est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 4 - 4t, \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

b. Montrer que le triangle ABC est un triangle isocèle.

4. Soit H le point d'intersection des droites Δ et Δ'.Montrer que le point H a pour coordonnées $\left(\frac{8}{9}\,;\frac{4}{9}\,;\frac{8}{9}\right)$.

Que représente le point H pour le triangle ABC ?

5. Montrer que le point H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

Retrouver alors la distance du point O au plan (ABC).

Nouvelle Calédonie mars 2011

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(− 2 ; 0 ; 1), B(1 ; 2 ; − 1) et C(− 2 ; 2 ; 2).

1. *a.* Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis les longueurs AB et AC.

b. En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

c. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$2x - y + 2z + 2 = 0.$$

3. Soient P_1, et P_2 les plans d'équations respectives $x + y - 3z + 3 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.

Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants selon une droite D dont un système d'équations paramétriques est : $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

4. Démontrer que la droite D et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

5. Soit S la sphère de centre Ω (1 ; − 3 ; 1) et de rayon $r = 3$.

a. Donner une équation cartésienne de la sphère S.

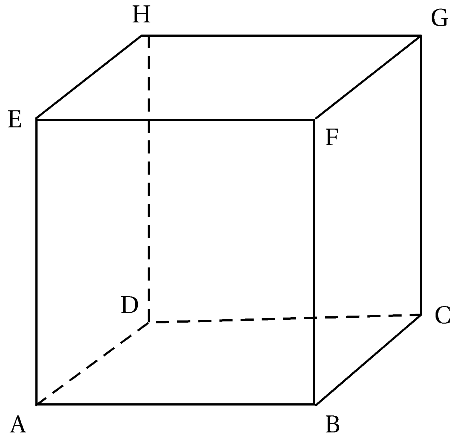
Dans les deux questions suivantes, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

b. Étudier l'intersection de la sphère S et de la droite D.

c. Démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère S.

Polynésie juin 2011

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1 représenté ci-dessous.



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $(D ; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

On note K le barycentre des points pondérés (D, 1) et (F, 2).

Partie A

1. Montrer que le point K a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3}\right)$.

2. Montrer que les droites (EK) et (DF) sont orthogonales.

3. Calculer la distance EK.

Partie B

Soit M un point du segment [HG].

On note $m = \text{H}M$ (m est donc un réel appartenant à [0 ; 1]).

1. Montrer que, pour tout réel m appartenant à l'intervalle [0 ; 1], le volume du tétraèdre EMFD, en unités de volume, est égal à $\frac{1}{6}$.

2. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (MFD) est

$$(-1+m)x + y - mz = 0.$$

3. On note d_m la distance du point E au plan (MFD).

a. Montrer que, pour tout réel m appartenant à l'intervalle [0 ; 1],

$$d_m = \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}.$$

b. Déterminer la position de M sur le segment [HG] pour laquelle la distance d_m est maximale.

c. En déduire que lorsque la distance d_m est maximale, le point K est le projeté orthogonal de E sur le plan (MFD).

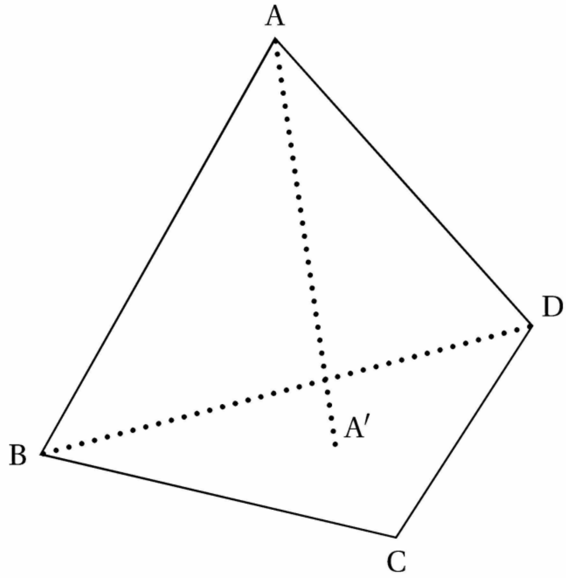
Pondichéry avril 2011

Partie 1

Dans cette partie, ABCD est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un solide dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux.

A' est le centre de gravité du triangle BCD.

Dans un tétraèdre, le segment joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée est appelé médiane. Ainsi, le segment [A A'] est une médiane du tétraèdre ABCD.



1. On souhaite démontrer la propriété suivante :

(P_1) : Dans un tétraèdre régulier, chaque médiane est orthogonale à la face opposée.

a. Montrer que $\overrightarrow{AA'}.\ \overrightarrow{BD} = 0$ et que $\overrightarrow{AA'}.\ \overrightarrow{BC} = 0$

(On pourra utiliser le milieu I du segment [BD] et le milieu J du segment [BC]).

b. En déduire que la médiane (A A') est orthogonale à la face BCD.

Un raisonnement analogue montre que les autres médianes du tétraèdre régulier ABCD sont également orthogonales à leur face opposée.

2. G est l'isobarycentre des points A, B, C et D. On souhaite démontrer la propriété suivante :

(P_2) : Les médianes d'un tétraèdre régulier sont concourantes en G.

En utilisant l'associativité du barycentre, montrer que G appartient à la droite (A A'), puis conclure.

Partie II

On munit l'espace d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points P(1 ; 2 ; 3), Q(4 ; 2 ; − 1) et R(− 2 ; 3 ; 0).

1. Montrer que le tétraèdre OPQR n'est pas régulier.

2. Calculer les coordonnées de P', centre de gravité du triangle OQR.

3. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (OQR) est :

$$3x + 2y + 16z = 0.$$

4. La propriété (P_1) de la partie 1 est-elle vraie dans un tétraèdre quelconque ?

2010

Amérique du Nord juin 2010

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives :

A(1 ; – 2 ; 4) B(– 2 ; – 6 ; 5) C(– 4 ; 0 ; – 3).

1. *a.* Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ (1 ; – 1 ; – 1) est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Déterminer une équation du plan (ABC).

2. *a.* Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par le point O et orthogonale au plan (ABC).

b. Déterminer les coordonnées du point O' projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

3. On désigne par H le projeté orthogonal du point O sur la droite (BC). Soit t le réel tel que $\overrightarrow{BH} = t\,\overrightarrow{BC}$.

a. Démontrer que $t = \dfrac{\overrightarrow{BO}\,.\,\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2}$

b. En déduire le réel t et les coordonnées du point H.

Antilles-Guyane septembre 2010

L'exercice comporte quatre propositions indépendantes.
Indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse choisie.

1. L'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, vérifiant $|z - 2| = |z - 2\,i|$ est la droite d'équation $y = x$.

2. Si A, B et C sont trois points deux à deux distincts du plan complexe d'affixes a, b et c vérifiant $\dfrac{b-a}{c-a} = -3$ alors A, B et C sont alignés.

3. L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

La droite de l'espace passant par le point B de coordonnées (2 ; 3 ; 4) et admettant le vecteur $\vec{u}$ (1 ; 2 ; 3) comme vecteur directeur a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t+1, \ t \in \mathbb{R}. \\ z = 3t+1 \end{cases}$

4. L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

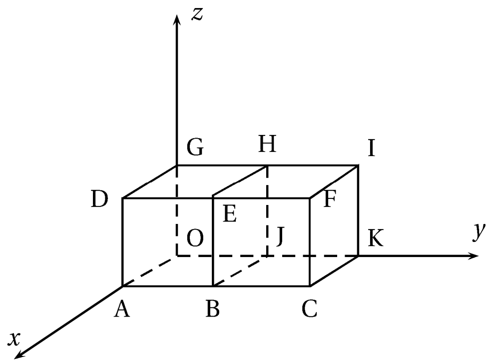
La sphère de centre A(1 ; 1 ; 1) et de rayon 10 est tangente au plan P d'équation $x + y + z - 1 = 0$.

Asie juin 2010

*Cet exercice est un QCM qui comporte 8 questions, numérotées de 1 à 8. À chaque question, une seule des trois réponses notée **a**, **b** ou **c** est exacte. On demande au candidat d'indiquer sur sa copie, pour chaque question, quelle est la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.*

Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse fausse ou une absence de réponse n'enlèvent pas de point.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points : A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(1, 2,0), D(1, 0, 1), E(1, 1, 1), F(1, 2, 1), G(0, 0, 1), H(0, 1, 1), I(0, 2, 1), J(0, 1, 0), K(0, 2, 0) comme indiqués sur la figure ci -dessous :



1. Question 1 : Le triangle GBI est :

Réponse ***a*** : isocèle.

Réponse ***b*** : équilatéral.

Réponse ***c*** : rectangle.

2. Question 2 : Le barycentre du système de points pondérés {(O, 2), (A, – 1), (C, 1)} est :

Réponse ***a*** : le point K.

Réponse ***b*** : le point I.

Réponse ***c*** : le point J.

3. Question 3 : Le produit scalaire $\overrightarrow{AH} . \overrightarrow{FC}$ est égal à :

Réponse ***a*** : 1.

Réponse ***b*** : – 1.

Réponse ***c*** : 2.

4. Question 4 : Les points B, C, I, H :

Réponse ***a*** : sont non coplanaires.

Réponse ***b*** : forment un rectangle.

Réponse ***c*** : forment un carré.

5. Question 5 : Une représentation paramétrique de paramètre *t* de la droite (KE) est :

Réponse ***a*** $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}$

Réponse ***b*** $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}$

Réponse ***c*** $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

6. Question 6 : Une équation cartésienne du plan (GBK) est :

Réponse ***a*** : $2x + 2y - z - 2 = 0$.

Réponse ***b*** : $x + y - 3 = 0$.

Réponse ***c*** : $x + y + 2z = 2$.

7. Question 7 : La distance du point C au plan (ADH) est :

Réponse ***a*** : $\sqrt{2}$.

Réponse ***b*** : 2.

Réponse ***c*** : $\dfrac{1}{2}$.

8. Question 8 : Le volume du tétraèdre HJKB est égal à :

Réponse ***a*** : $\frac{1}{2}$

Réponse ***b*** : $\frac{1}{6}$.

Réponse ***c*** : $\frac{1}{3}$.

Centres étrangers juin 2010

Pour chaque question une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou ratisse en justifiant la réponse. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Question 1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les droites (D_1) et (D_2) de représentations paramétriques :

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -3t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ et } \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 5 - t \\ z = -2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Affirmation

Les droites (D_1) et (D_2) sont orthogonales.

Question 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point A de coordonnées (2 ; – 1 ; 3) et la droite (D) de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2 + 2t \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

Affirmation

Le plan (P) contenant le point A et orthogonal à la droite (D) a pour équation : $2x + y - z = 0$.

Question 3

La durée de vie, exprimée en heures, d'un jeu électronique, est une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0003$.

On rappelle que, pour tout $t \geq 0$, $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx$.

Affirmation

La probabilité pour que la durée de vie de ce jeu soit strictement supérieure à 2000 heures est inférieure à 0,5.

Question 4

A et B sont deux événements liés à une même épreuve aléatoire qui vérifient : $p(A) = 0{,}4$, $p_A(B) = 0{,}7$, et $p_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 0{,}1$

Affirmation

La probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé est égale à $\dfrac{14}{41}$.

La Réunion septembre 2010

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les plans P et Q d'équations respectives : $x + y + z = 0$ et $2x + 3y + z - 4 = 0$.

1. Montrer que l'intersection des plans P et Q est la droite D dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = -4 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases}$ où t est un nombre réel.

2. Soit λ un nombre réel. On considère le plan P_λ d'équation : $(1 - \lambda)(x + y + z) + \lambda(2x + 3y + z - 4) = 0$.

a. Vérifier que le vecteur $\vec{n}(1 + \lambda ; 1 + 2\lambda ; 1)$ est un vecteur normal du plan P_λ.

b. Donner une valeur du nombre réel λ pour laquelle les plans P et P_λ sont confondus.

c. Existe-t-il un nombre réel λ pour lequel les plans P et P_λ sont perpendiculaires ?

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite D′, intersection des plans P et P_{-1}.

Montrer que les droites D et D′ sont confondues.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

On considère le point A(1 ; 1 ; 1). Déterminer la distance du point A à la droite D, c'est-à-dire la distance entre le point A et son projeté orthogonal sur la droite D.

Liban juin 2010

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$.

On note (D) la droite passant par les points :

$$A(1\,;-2\,;-1) \text{ et } B(3\,;-5\,;-2).$$

1 Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\begin{cases} x = 1 + 2\,t \\ y = -2 - 3\,t \\ z = -1 - t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

2. On note (D′) la droite ayant pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 - k \\ y = 1 + 2\,k \\ z = k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Montrer que les droites (D) et (D′) ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan (P) d'équation $4\,x + y + 5\,z + 3 = 0$.

a. Montrer que le plan (P) contient la droite (D).

b. Montrer que le plan (P) et la droite (D′) se coupent en un point C dont on précisera les coordonnées.

4. On considère la droite (Δ) passant par le point C et de vecteur directeur $\vec{w}\ (1\,;1\,;-1)$.

a. Montrer que les droites (Δ) et (D′) sont perpendiculaires.

b. Montrer que la droite (Δ) coupe perpendiculairement la droite (D) en un point E dont on précisera les coordonnées.

Métropole La Réunion septembre 2010

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soit (P) le plan d'équation : $3x + y - z - 1 = 0$ et (D) la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \end{cases}$, où t désigne un nombre réel.

1. *a.* Le point C(1 ; 3 ; 2) appartient-il au plan (P) ? Justifier.

b. Démontrer que la droite (D) est incluse dans le plan (P).

2. Soit (Q) le plan passant par le point C et orthogonal à la droite (D).

a. Déterminer une équation cartésienne du plan (Q).

b. Calculer les coordonnées du point I, point d'intersection du plan (Q) et de la droite (D).

c. Montrer que $CI = \sqrt{3}$.

3. Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite (D) de coordonnées $(-t + 1 ; 2t ; -t + 2)$.

a. Vérifier que pour tout nombre réel t, $CM_t^2 = 6t^2 - 12t + 9$.

b. Montrer que CI est la valeur minimale de CM_t lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels.

Polynésie juin 2010

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

– les points A(1 ; 1 ; 1) et B(3 ; 2 ; 0) ;

– le plan (P) passant par le point B et admettant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour vecteur normal ;

– le plan (Q) d'équation : $x - y + 2z + 4 = 0$;

– la sphère (S) de centre A et de rayon AB.

1. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (P) est :

$$2x + y - z - 8 = 0$$

2. Déterminer une équation de la sphère (S).

3. ***a.*** Calculer la distance du point A au plan (Q).

En déduire que le plan (Q) est tangent à la sphère (S).

b. Le plan (P) est-il tangent à la sphère (S) ?

4. On admet que le projeté orthogonal de A sur le plan (Q), noté C, a pour coordonnées (0 ; 2 ; − 1).

a. Prouver que les plans (P) et (Q) sont sécants.

b. Soit (D) la droite d'intersection des plans (P) et (Q). Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (D) est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases} \text{ avec } (t \in \mathbb{R}).$$

c. Vérifier que le point A n'appartient pas à la droite (D)

d. On appelle (R) le plan défini par le point A et la droite (D).

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ?

« Tout point du plan (R) est équidistant des points B et C ».

Justifier votre réponse.

Pondichéry avril 2010

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration pourra consister à fournir un contre-exemple.

1. La droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t \\ z = 3t - 1 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ est parallèle au plan dont une équation cartésienne est : $x + 2y + z - 3 = 0$.

2. Les plans P, P', P'' d'équations respectives
$x - 2y + 3z = 3$, $2x + 3y - 2z = 6$ et $4x - y + 4z = 12$
n'ont pas de point commun.

3. Les droites de représentations paramétriques respectives

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 7 + 2u \\ y = 2 + 2u \\ z = -6 - u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$$

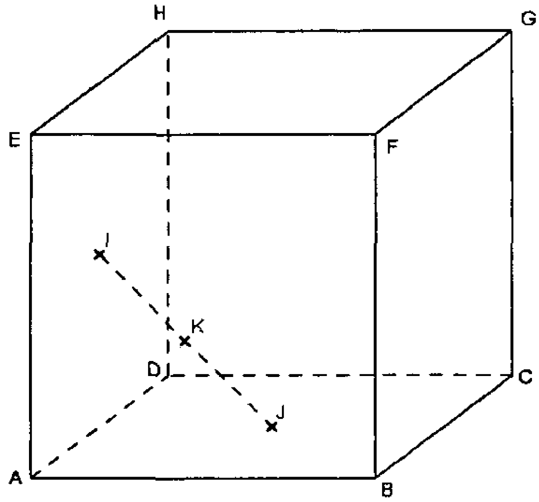
sont sécantes.

4. On considère les points A, de coordonnées (– 1, 0, 2), B de coordonnées (1, 4, 0), et C, de coordonnées (3, – 4, – 2). Le plan (ABC) a pour équation $x + z = 1$.

5. On considère les points A, de coordonnées (– 1, 1, 3), B, de coordonnées (2, 1, 0), et C, de coordonnées (4, – 1, 5).
On peut écrire C comme barycentre des points A et B.

Amérique du Nord juin 2009

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.



On note I le centre de la face ADHE, J celui de la face ABCD et K le milieu du segment [I J].

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K dans ce repère.
2. Démontrer que les points A, K et G ne sont pas alignés.
3. *a*) Démontrer que le plan médiateur du segment [IJ] est le plan (AKG).

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (AKG).

c) Vérifier que le point D appartient au plan (AKG).

4. Dans cette question, on veut exprimer K comme barycentre des points A, D et G. Soit L le centre du carré DCGH.

a) Démontrer que le point K est le milieu du segment [AL].

b) *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que K est le barycentre des points A, D et G affectés de coefficients que l'on précisera.

Amérique du Sud novembre 2009

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On prend 1 cm comme unité.

Partie A — Restitution organisée de connaissances

Soit D le point de coordonnées (x_D, y_D, z_D) et P le plan d'équation $a x + b y + c z + d = 0$, où a, b et c sont des réels qui ne sont pas tous nuls.

Démontrer que la distance du point D au plan P est donnée par :

$$d(D, P) = \frac{|a x_D + b y_D + c z_D + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Partie B

On considère les points A de coordonnées $(3 ; -2 ; 2)$, B de coordonnées $(6 ; -2 ; -1)$, C de coordonnées $(6 ; 1 ; 5)$ et D de coordonnées $(4 ; 0 ; -1)$.

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle. En déduire l'aire du triangle ABC.

2. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(1 ; -2 ; 1)$ est normal au plan (ABC). Déterminer une équation du plan (ABC).

3. Calculer la distance du point D au plan (ABC). Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

Partie C

Soit Q le plan d'équation $x - 2y + z - 5 = 0$.

1. Déterminer la position relative des deux plans Q et (ABC).

2. Q coupe les droites (DA), (DB) et (DC) respectivement en E, F et G.

Déterminer les coordonnées de E et montrer que E appartient au segment [DA].

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer le volume du tétraèdre EFGD.

Antilles-Guyane septembre 2009

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points :

$$A(1\ ;-1\ ;4),\ B(7\ ;-1\ ;-2) \text{ et } C(1\ ;5\ ;-2).$$

1. a. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

c. Montrer que le vecteur $\vec{n}\ (1\ ;1\ ;1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

d. En déduire que $x + y + z - 4 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soit D la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = -2t - 2 \\ z = -2t - 3 \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}.$$

a. Montrer que la droite D est perpendiculaire au plan (ABC).

b. Montrer que les coordonnées du point G, intersection de la droite D et du plan (ABC) sont (3 ; 1 ; 0).

c. Montrer que G est l'isobarycentre des points A, B et C.

3. Soit S la sphère de centre G passant par A.

a. Donner une équation cartésienne de la sphère S .

b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection E et F, de la droite D et de la sphère S .

Antilles-Guyane juin 2009

1. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

Soit le point A d'affixe 3, le point B d'affixe $-4\,i$ et l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $|z-3|=|z+4\,i|$.

Affirmation : E est la médiatrice du segment [AB].

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

On considère trois points A, B et C deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c, tels que $\dfrac{c-a}{b-a}=2\,i$.

Affirmation : A appartient au cercle de diamètre [BC].

3. On considère le nombre $z=2\,e^{i\frac{\pi}{7}}$.

Affirmation : $z^{2\,009}$ est un nombre réel positif.

4. On considère trois points A, B et C non alignés de l'espace. Le point G est le centre de gravité du triangle ABC.

On note F l'ensemble des points M vérifiant $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=6$.

Affirmation : F est la sphère de centre de G et de rayon 2.

5. L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.

S est la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=5$.

P est le plan d'équation $x+y-5=0$.

Affirmation : Le plan P coupe la sphère S suivant un cercle.

Asie juin 2009

L'exercice comporte quatre questions indépendantes. Pour chacune d'entre elles, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Il s'agit de déterminer la bonne réponse et de justifier le choix ainsi effectué.

Un choix non justifié ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Question 1

La solution f de l'équation différentielle $y' + 2y = 6$ qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$ est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

Réponse (1) : $f(x) = -2\,e^{-2x} + 3$

Réponse (2) : $f(x) = -2\,e^{2x} + 3$

Réponse (3) : $f(x) = -2\,e^{-2x} - 3$

2. Question 2

On considère un triangle ABC et on note I le point tel que $2\,\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Les points G, I et A sont alignés lorsque G est le barycentre du système :

Réponse (1) : {(A, 1), (C, 2)}

Réponse (2) : {(A, 1), (B, 2), (C, 2)}

Réponse (3) : {(A, 1), (B, 2), (C, 1)}

3. Question 3

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan P d'équation cartésienne : $x - 3y + 2z = 5$ et le point $A(2\,;\,3\,;\,-1)$.

Le projeté orthogonal du point A sur le plan P est le point :

Réponse (1) : $H_1(3\,;\,-1\,;\,4)$

Réponse (2) : $H_2(4\,;\,-3\,;\,-4)$

Réponse (3) : $H_3(3\,;\,0\,;\,1)$

4. Question 4

La valeur moyenne de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ est égale à :

Réponse (1) : $-\dfrac{\pi}{2}$ Réponse (2) : $\dfrac{\pi}{4}$ Réponse (3) : $\dfrac{\pi}{2}$.

Centres étrangers juin 2009

On se propose dans cet exercice, d'étudier des propriétés d'un solide de l'espace.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(3 ; 4 ; 0) ; B(0 ; 5 ; 0) et C(0 ; 0 ; 5). On note I le milieu du segment [AB].

1. Faire une figure où l'on placera les points A, B,C, I dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2. Démontrer que les triangles OAC et OBC sont rectangles et isocèles. Quelle est la nature du triangle ABC ?

3. Soit H le point de coordonnées $\left(\frac{15}{19} ; \frac{45}{19} ; \frac{45}{19}\right)$.

a. Démontrer que les points H, C, I sont alignés.

b. Démontrer que H est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

c. En déduire une équation cartésienne du plan ABC.

4. Calculs d'aire et de volume.

a. Calculer l'aire du triangle OAB. En déduire le volume du tétraèdre OABC.

b. Déterminer la distance du point O au plan (ABC).

c. Calculer l'aire du triangle ABC.

La Réunion juin 2009

Soient A(1 ; 2 ; 0), B(2 ; 2 ; 0), C(1 ; 3 ; 0) et D(1 ; 2 ; 1) quatre points de l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\,)$.

(P) désigne le plan orthogonal à (BC) contenant A ;
(Q) désigne le plan orthogonal à (DC) contenant A ;
(R) désigne le plan orthogonal à (BD) contenant A.

1. Montrer que le plan (P) a pour équation cartésienne

$$x - y + 1 = 0.$$

On admet que le plan (Q) a pour équation cartésienne $-y + z + 2 = 0$ et que le plan (R) a pour équation cartésienne $-x + z + 1 = 0$.

2. ***a.*** Résoudre le système : $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ -y + z + 2 = 0 \\ -x + z + 1 = 0 \end{cases}$.

b. En déduire que l'intersection des trois plans (P), (Q) et (R) est une droite (d) passant par le point E(2 ; 3 ; 1).

c. Vérifier que la droite (d) est orthogonale au plan (BCD).

En déduire une équation cartésienne du plan (BCD).

3. Déterminer une équation cartésienne pour chacun des plans (ABC), (ABD) et (ACD).

On admet que ces plans sont respectivement parallèles aux plans de repères $(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j}\,)$, $(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{k}\,)$ et $(O\,;\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\,)$.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

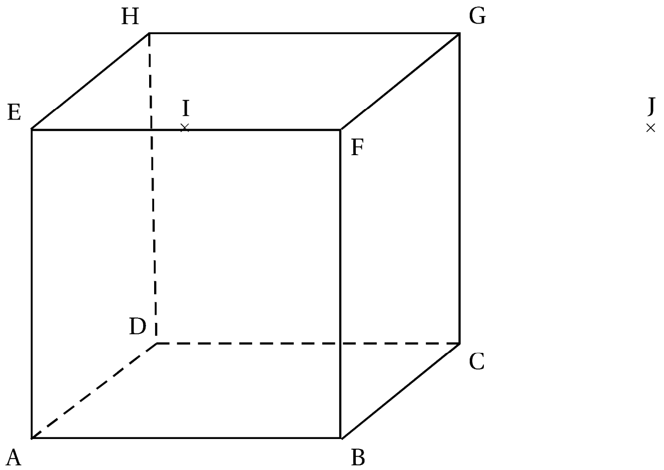
a. Montrer que tout point M de la droite (d) est équidistant des plans (ABC), (ABD) et (ACD).

b. Existe-t-il des points de l'espace équidistants des plans (ABC), (ABD), (ACD) et (BCD) ?

Liban juin 2009

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1. On désigne par I le milieu de [EF] et par J le symétrique de E par rapport à F.

Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE})$.



1. *a.* Déterminer les coordonnées des points I et J.

b. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

c. En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).

d. Calculer la distance du point F au plan (BGI).

2. On note (Δ) la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).

a. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ).

b. Montrer que la droite (Δ) passe par le centre K de la face ADHE.

c. Montrer que la droite (Δ) et le plan (BGI) sont sécants en un point, noté L, de coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{1}{6}\,;\frac{5}{6}\right)$.

d. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Le point L est-il l'orthocentre du triangle BGI ?

Métropole septembre 2009

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$.

1. On désigne par P le plan d'équation $x + y - 1 = 0$ et par P′ le plan d'équation $y + z - 2 = 0$.

Justifier que les plans P et P′ sont sécants et vérifier que leur intersection est la droite D, dont une représentation paramétrique est :

$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$, où t désigne un nombre réel.

2. (*a*) Déterminer une équation du plan R passant par le point O et orthogonal à la droite D.

(*b*) Démontrer que le point I, intersection du plan R et de la droite D, a pour coordonnées (0 ; 1 ; 1).

3. Soient A et B les points de coordonnées respectives $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ et (1 ; 1 ; 0).

(*a*) Vérifier que les points A et B appartiennent au plan R.

(*b*) On appelle A’ et B’ les points symétriques respectifs des points A et B par rapport au point I.

Justifier que le quadrilatère ABA’ B’ est un losange.

(*c*) Vérifier que le point S de coordonnées (2 ; − 1 ; 3) appartient à la droite D.

(*d*) Calculer le volume de la pyramide SABA’ B’.

On rappelle que le volume V d'une pyramide de base d'aire b et de hauteur h est : $V = \frac{1}{3} b \times h$.

Métropole juin 2009

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque question une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il est attribué un point si la réponse exacte, aucun point n'est enlevé pour une réponse inexacte ou une absence de réponse.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(1 ; 2 ; − 1), B(1 ; 1 ; 0), C(9 ; – 1 ; – 2), S(1 ; 1 ; 1).

On admet qu'une équation du plan (ABC) est :

$$x + 2y + 2z - 3 = 0.$$

1. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

a. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 4t \quad (t \text{ réel}) \\ z = -1 + 3t \end{cases}$

b. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 - t \quad (t \text{ réel}) \\ z = 3 + t \end{cases}$

c. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 2t \quad (t \text{ réel}) \\ z = 2t \end{cases}$

2. Les coordonnées du point S' symétrique du point S par rapport au plan (ABC) sont :

a. $\left(\frac{10}{9} ; \frac{11}{9} ; \frac{10}{9}\right)$

b. $\left(\frac{5}{9} ; \frac{1}{9} ; \frac{1}{9}\right)$

c. $\left(\frac{7}{9} ; \frac{5}{9} ; \frac{5}{9}\right)$

3. Le triangle ABC est :

a. isocèle

b. rectangle en A

c. rectangle en B

4. L'ensemble des points M de l'espace vérifiant :

$$\left\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 9 \text{ est :}$$

a. un plan passant par S

b. une sphère passant par S

c. une sphère de centre S

Nouvelle Calédonie novembre 2009

L'espace est rapporté au repère orthonormal (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$).

On considère le cube ABCDEFGH représenté sur l'ANNEXE, à rendre avec la copie.
On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [BF] et [HF].

1. Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
2. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ (2 ; 1 ; 1) est orthogonal à $\overrightarrow{IK}$ et à $\overrightarrow{IJ}$.

En déduire qu'une équation du plan (IJK) est :

$$4x + 2y + 2z - 5 = 0.$$

3. *a*. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (CD).

b. En déduire que le point d'intersection R du plan (IJK) et de la droite (CD) est le point de coordonnées $\left(\frac{3}{4}\,;1\,;0\right)$.

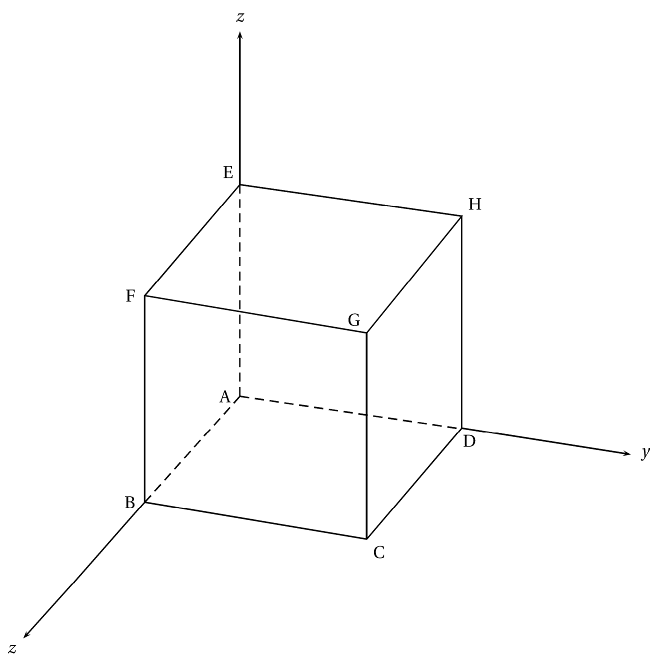
c. Placer le point R sur la figure.

4. Tracer sur la figure la section du cube par le plan (IJK). On peut répondre à cette question sans avoir traité les précédentes.

5. *a*. Montrer que la distance du point G au plan (IJK) est $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

b. Soit S la sphère de centre G passant par F. Justifier que la sphère S et le plan (IJK) sont sécants. Déterminer le rayon de leur intersection.

ANNEXE



Nouvelle Calédonie juin 2009

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points : A(4 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0), C(0 ; 0 ; 3) et E $\left(\frac{2}{3} ; -\frac{2}{3} ; \frac{1}{9}\right)$

On se propose de déterminer de deux façons la distance δ_E du point E au plan (ABC).

RAPPEL : Soit (P) un plan d'équation $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ où a, b, c et d sont des nombre réels avec, a, b et c non tous nuls et M un point de coordonnées $(x_M ; y_M ; z_M)$ la distance δ_M du point M au plan (P) est égale à :

$$\frac{\left| a\,x_M + b\,y_M + c\,z_M + d \right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

1. ***a.*** Montrer que les points A, B et C déterminent bien un plan.

b. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées (3 ; 6 ; 4). Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Montrer qu'une équation du plan (ABC) est :

$$3\,x + 6\,y + 4\,z - 12 = 0.$$

d. Déduire des questions précédentes la distance δ_E.

2. ***a.*** Montrer que la droite (D) de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2\,t \\ z = \frac{5}{9} + \frac{4}{3}t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$, est perpendiculaire au plan (ABC) et passe par le point E.

b. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal G du point E sur le plan (ABC).

c. Retrouver à partir des coordonnées des points E et G la distance δ_E.

Polynésie juin 2009

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points :

$$A(1\,;-1\,;3),\ B(0\,;3\,;1),\ C(6\,;-7\,;-1),$$
$$D(2\,;1\,;3) \text{ et } E(4\,;-6\,;2).$$

1. *a.* Montrer que le barycentre du système $\{(A, 2), (B, -1), (C, 1)\}$ est le point E.

b. En déduire l'ensemble Γ des points M de l'espace tels que $\left\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 2\sqrt{21}$.

2. *a.* Montrer que les points A, B et D définissent un plan.

b. Montrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (ABD).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABD).

3. *a.* Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

b. Déterminer les coordonnées du point F intersection de la droite (EC) et du plan (ABD).

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation*

Montrer que le plan (ABD) et l'ensemble Γ, déterminé à la question 1., sont sécants. Préciser les éléments caractéristiques de cette intersection.

Polynésie septembre 2009

On considère le cube OABCDEFG d'arête de longueur 1 représenté ci-dessous.

Il n'est pas demandé de rendre le graphique complété avec la copie.

Soient les points P et Q tels que $\overrightarrow{OP} = 2\,\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OQ} = 4\,\overrightarrow{OC}$.

On appelle R le barycentre des points pondérés (B, – 1) et (F , 2).

L'espace est muni du repère orthonormal $(O ; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD})$.

1. *a.* Démontrer que le point R a pour coordonnées (1 ; 1 ; 2).

b. Démontrer que les points P, Q et R ne sont pas alignés.

c. Quelle est la nature du triangle PQR ?

2. *a.* Démontrer qu'une équation du plan (PQR) est

$$4\,x + 2\,y + z - 8 = 0.$$

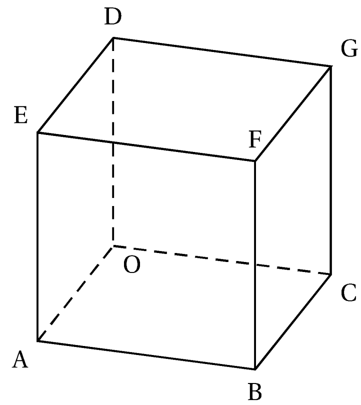
b. Vérifier que le point D n'appartient pas au plan (PQR).

3. On appelle H le projeté orthogonal du point D sur le plan (PQR).

a. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (DH).

b. Déterminer les coordonnées du point H.

c. Démontrer que le point H appartient à la droite (PR).



Pondichéry avril 2009

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points : A de coordonnées (1, 1, 0), B de coordonnées (2, 0, 3), C de coordonnées (0, – 2, 5) et D de coordonnées (1, – 5, 5).

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est VRAIE ou par FAUSSE en justifiant chaque fois la réponse :

Proposition 1 : L'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) tels que $y = 2x + 4$ est une droite.

Proposition 2 : La transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M′ tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ est l'homothétie de centre G, où G désigne le barycentre du système {(A, 1), (B, 1), (C, 2)}, et de rapport 3.

Proposition 3 : A, B, C et D sont quatre points coplanaires.

Proposition 4 : La sphère de centre Ω de coordonnées (3, 3, 0) et de rayon 5 est tangente au plan d'équation :

$$2x + 2y + z + 3 = 0.$$

2008

Amérique du Nord juin 2008

Partie A

On considère deux points A et D de l'espace et on désigne par I le milieu du segment [AD].

1. Démontrer que, pour tout point M de l'espace,

$$\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = MI^2 - IA^2 .$$

2. En déduire l'ensemble (E) des points M de l'espace, tels que $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$.

Partie B :

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives :

$$A\ (3 ; 0 ; 0),\ B\ (0 ; 6 ; 0),\ C\ (0 ; 0 ; 4) \text{ et } D\ (-5 ; 0 ; 1).$$

1\. *a*. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ (4 ; 2 ; 3) est normal au plan (ABC).

b. Déterminer une équation du plan (ABC).

2\. *a*. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, orthogonale au plan (ABC) passant par D.

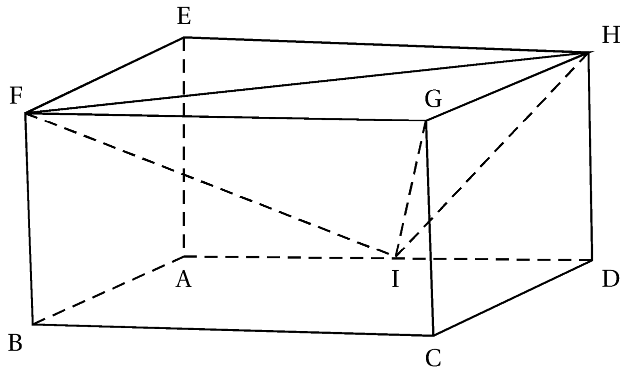
b. En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

c. Calculer la distance du point D au plan (ABC).

d. Démontrer que le point H appartient l'ensemble (E) défini dans la partie A.

Amérique du Sud novembre 2008

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, on considère un pavé droit ABCDEFGH tel que : AB = 1, AD = 2 et AE = 1.
On appelle I le milieu de [AD].



L'espace est muni du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AE})$.

1. Déterminer, dans le repère choisi, les coordonnées des points F, G, H.

2. *a.* Montrer que le volume V du tétraèdre GFIH est égal à $\frac{1}{3}$.

b. Montrer que le triangle FIH est rectangle en I.

En exprimant V d'une autre façon, calculer la distance *d* du point G au plan (FIH).

3. Soit le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(2 ; 1 ; -1)$.

a. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (FIH).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (FIH).

c. Retrouver par une autre méthode la distance *d* du point G au plan (FIH).

4. *a.* La droite (AG) est-elle perpendiculaire au plan (FIH) ?

b. Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.

c. Déterminer les cordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH).

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*

Soit Γ la sphère de centre G passant par K.

Quelle est la nature de l'intersection de Γ et du plan (FIH) ? (On ne demande pas de préciser les éléments caractérisant cette intersection)

Antilles Guyane juin 2008

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des propositions est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.
Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. L'ensemble des points M(x ; y ; z) tels que :

$$\begin{cases} 2x-6y+2z-7=0 \\ -x+3y-z+5=0 \end{cases}$$

est :
Réponse A : l'ensemble vide Réponse B : une droite
Réponse C : un plan Réponse C : réduit à un point

2. Les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x=1-t \\ y=-1+t \\ z=2-3t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \text{ et } \begin{cases} x=2+t \\ y=-2-t \\ z=4+2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

sont :
Réponse A : parallèles et distinctes
Réponse B : confondues
Réponse C : sécantes
Réponse D : non coplanaires

3. La distance du point A(1 ; − 2 ; 1) au plan d'équation $-x+3y-z+5=0$ est égale à :

Réponse A : $\frac{3}{11}$ Réponse B : $\frac{3}{\sqrt{11}}$

Réponse C : $\frac{1}{2}$ Réponse D : $\frac{8}{\sqrt{11}}$

4. Le projeté orthogonal du point B(1 ; 6 ; 0) sur le plan d'équation $-x+3y-z+5=0$ a pour coordonnées :
Réponse A : (3 ; 1 ; 5) Réponse B : (2 ; 3 ; 1)
Réponse C : (3 ; 0 ; 2) Réponse D : (− 2; 3 ; − 6)

Asie juin 2008

A – Vrai ou faux ?

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse la démonstration consistera à proposer un contre- exemple ; une figure pourra constituer ce contre-exemple.

Rappel des notations :

• $P_1 \cap P_2$ désigne l'ensemble des points communs aux plans P_1 et P_2.

• L'écriture $P_1 \cap P_2 = \varnothing$; signifie que les plans P_1 et P_2 n'ont aucun point commun.

1. Si P_1, P_2 et P_3 sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$P_1 \cap P_2 \neq \varnothing \text{ ; et } P_2 \cap P_3 \neq \varnothing$$

alors on peut conclure que P_1 et P_3 vérifient : $P_1 \cap P_3 \neq \varnothing$.

2. Si P_1, P_2 et P_3 sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \varnothing \text{ ;}$$

alors on peut conclure que P_1, P_2 et P_3 sont tels que :

$$P_1 \cap P_2 = \varnothing \text{ ; et } P_2 \cap P_3 = \varnothing .$$

3. Si P_1, P_2 et P_3 sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$P_1 \cap P_2 \neq \varnothing \text{ ; et } P_1 \cap P_3 = \varnothing ,$$

alors on peut conclure que P_2 et P_3 vérifient : $P_2 \cap P_3 \neq \varnothing$.

4. Si P_1 et P_2 sont deux plans distincts et D une droite de l'espace vérifiant :

$$P_1 \cap D \neq \varnothing \text{ ; et } P_1 \cap P_2 = \varnothing ,$$

alors on peut conclure que $P_2 \cap D \neq \varnothing$.

B – Intersection de trois plans donnés

Dans un repère orthonormal de l'espace on considère les trois plans suivants :

• P_1 d'équation $x + y - z = 0$

• P_2 d'équation $2x + y + z - 3 = 0$,

• P_3 d'équation $x + 2y - 4z + 3 = 0$.

1. Justifier que les plans P_1 et P_2 sont sécants puis déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée Δ.
2. En déduire la nature de l'intersection $P_1 \cap P_2 \cap P_3$.

Centres étrangers juin 2008

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points :

A (2 ; 1 ; − 1), B (− 1 ; 2 ; 4), C (0 ; − 2 ; 3), D (1 ; 1 ; − 2)

et le plan P d'équation $x - 2y + z + 1 = 0$.

Pour chacune des huit affirmations suivantes, dire, sans justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et l'un des deux mots VRAI ou FAUX correspondant à la réponse choisie.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1. Affirmation 1 : les points A, B et C définissent un plan.
2. Affirmation 2 : la droite (AC) est incluse dans le plan P.
3. Affirmation 3 : une équation cartésienne du plan (ABD) est : $x + 8y - z - 11 = 0$.
4. Affirmation 4 : une représentation paramétrique de la droite (AC) est : $\begin{cases} x = 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = 3 - 4k \end{cases}$ $(k \in \mathbb{R})$.
5. Affirmation 5 : les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
6. Affirmation 6 : la distance du point C au plan P est égale à $4\sqrt{6}$
7. Affirmation 7 : la sphère de centre D et de rayon $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ est tangente au plan P .
8. Affirmation 8 : le point E $\left(-\dfrac{4}{3} ; \dfrac{2}{3} ; \dfrac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan P.

Liban juin 2008

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Partie A

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Soit z un nombre complexe d'argument $\frac{\pi}{3}$.

Proposition 1 : « z^{100} est un nombre réel ».

2. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z différente de 1 du plan telle que $\left|\frac{z}{1-z}\right| = 1$.

Proposition 2 : « l'ensemble (E) est une droite parallèle à l'axe des réels ».

3. Soit r la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et dont le centre K a pour affixe $1 + i\sqrt{3}$.

Proposition 3 : « l'image du point O par la rotation r a pour affixe $(1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$ ».

4. On considère l'équation (E) suivante :

$$z^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) z + 1 = 0.$$

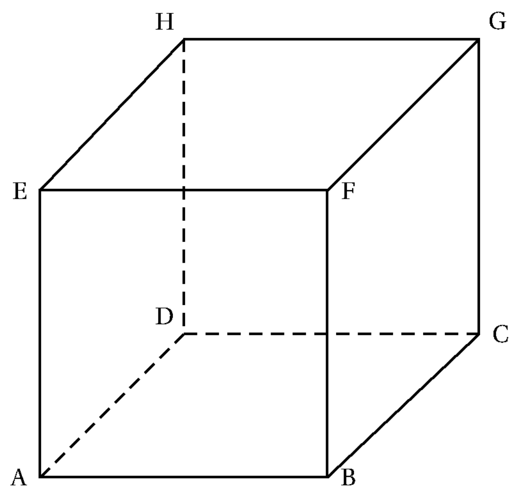
Proposition 4 : « l'équation (E) a deux solutions complexes de modules égaux à 1 ».

Partie B

On considère le cube ABCDEFGH d'arête 1, représenté ci-dessous.

Proposition 5 : « le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (BDE) ».

Proposition 6 : « les droites (EB) et (ED) sont perpendiculaires ».



Métropole juin 2008

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, k)$, on considère les points :

$$A(1, 1, 0) ; B(1, 2, 1) \text{ et } C(3, -1, 2).$$

1. *a*. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Démonter que le plan (ABC) a pour équation cartésienne :

$$2x + y - z - 3 = 0 .$$

2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives :

$$2y - z - 4 = 0 \text{ et } 2x + 3y - 2z - 5 = 0.$$

Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est une droite (D), dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \qquad\qquad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

3. Quelle est l'intersection des trois plans (ABC), (P) et (Q) ?

4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer la distance du point A à la droite (D).

Nouvelle Calédonie novembre 2008

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

$$A(3\,;-2\,;1)\ B(5\,;2\,;-3)\ C(6\,;-2\,;-2)\ D(4\,;3\,;2)$$

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés, puis que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

2. a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\,(2\,;1\,;2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

b. En déduire une équation du plan (ABC).

c. Montrer que la distance du point D au plan (ABC) est égale à 3.

3. Calculer le volume du tétraèdre ABCD en unités de volume.

Nouvelle- Calédonie mars 2008

L'espace est rapporté à un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé. Soit t un nombre réel.

On donne le point A $(-1 ; 2 ; 3)$ et la droite D de système d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = 9 + 4t \\ y = 6 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

Le but de cet exercice est de calculer de deux façons différentes la distance d entre le point A et la droite D.

1. *a*. Donner une équation cartésienne du plan P, perpendiculaire à la droite D et passant par A.

b. Vérifier que le point B $(-3 ; 3 ; -4)$ appartient à la droite D.

c. Calculer la distance d_{B} entre le point B et le plan P .

d. Exprimer la distance d en fonction de d_{B} et de la distance AB. En déduire la valeur exacte de d.

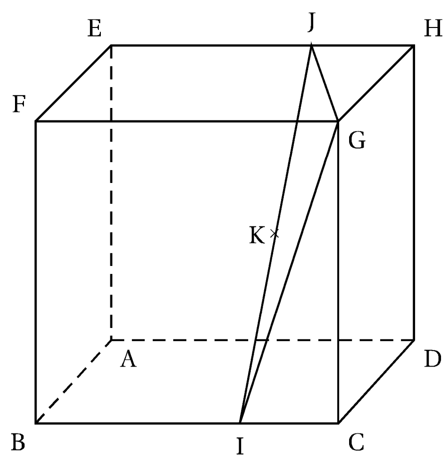
2. Soit M un point de la droite D. Exprimer AM^2 en fonction de t . Retrouver alors la valeur de d.

Polynésie septembre 2008
On donne la propriété suivante : « par un point de l'espace il passe un plan et un seul orthogonal à une droite donnée »
Sur la figure donnée en annexe, on a représenté le cube ABCDEFGH d'arête 1.

On a placé : les points I et J tels que $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$ le milieu K de [IJ].

On appelle P le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ).
Partie A
1. Démontrer que le triangle FIJ est isocèle en F.
En déduire que les droites (FK) et (IJ) sont orthogonales.
On admet que les droites (GK) et (IJ) sont orthogonales.
2. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGK).
3. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGP).
4. a. Montrer que les points F, G, K et P sont coplanaires.
b. En déduire que les points F, P et K sont alignés.
Partie B
L'espace est rapporté au repère orthonormal (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$).

On appelle N le point d'intersection de la droite (GP) et du plan (ADB).
On note (x ; y ; 0) les coordonnées du point N.
1. Donner les coordonnées des points F, G, I et J.
2. a. Montrer que la droite (GN) est orthogonale aux droites (FI) et (FJ).
b. Exprimer les produits scalaires $\overrightarrow{GN}.\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{GN}.\overrightarrow{FJ}$ en fonction de x et y.
c. Déterminer les coordonnées du point N.
3. Placer alors le point P sur la figure en annexe.



Polynésie juin 2008

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points :

$$A(1 ; 2 ; 3),\ B(0 ; 1 ; 4),\ C(-1 ; -3 ; 2),\ D(4 ; -2 ; 5)$$

et le vecteur $\vec{n}\ (2 ; -1 ; 1)$.

1. *a*. Démontrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.

b. Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Déterminer une équation du plan (ABC).

2. Soit (Δ) la droite dont une représentation paramétrique est :

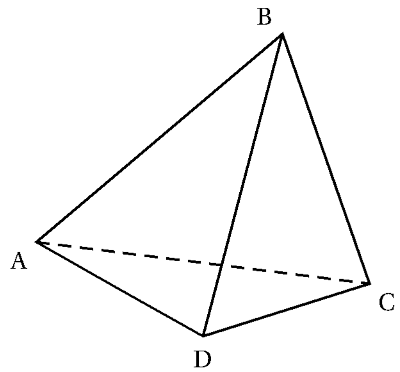
$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que le point D appartient à la droite (Δ) et que cette droite est perpendiculaire au plan (ABC).

3. Soit E le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

Montrer que le point E est le centre de gravité du triangle ABC.

Pondichéry avril 2008
On considère un tétraèdre ABCD.
On note I , J , K, L, M, N les milieux respectifs des arêtes
[AB], [CD], [BC], [AD], [AC] et [BD].
On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C et D.



1. Montrer que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.
Dans la suite de l'exercice, on suppose que AB = CD, BC = AD et AC = BD.
(On dit que le tétraèdre ABCD est équifacial, car ses faces sont isométriques).
2. *a*. Quelle est la nature du quadrilatère IKJL ? Préciser également la nature des quadrilatères IMJN et KNLM.
b. En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.
3. *a*. Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN).
b. Quelle est la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IJ} . \overrightarrow{MK}$? En déduire que (IJ) est orthogonale à la droite (AB). Montrer de même que (I J) est orthogonale à la droite (CD).
c. Montrer que G appartient aux plans médiateurs de [AB] et [CD].
d. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Comment démontrerait-on que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD ?

2007

Amérique du Nord mai 2007

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie.

Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit (P) le plan dont une équation est : $2x + y - 3z + 1 = 0$. Soit A le point de coordonnées (1 ; 11 ; 7).

Proposition 1 :

« Le point H, projeté orthogonal de A sur (P), a pour coordonnées (0 ; 2 ; 1) ».

2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2 - 2y$.

On appelle u la solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $u(0) = 0$.

Proposition 2 : «On a $u\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ».

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{7u_n}$

Proposition 3 : « Pour tout entier naturel n, on a $0 \leq u_n \leq 67$ ».

Amérique du Sud novembre 2007

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère le point A de coordonnées $(-2 ; 8 ; 4)$ et le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(1 ; 5 ; -1)$.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives $x - y - z = 7$ et $x - 2z = 11$.

Démontrer que les plans (P) et (Q) sont sécants. On donnera une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée (d ′).

Montrer que le vecteur de coordonnées $(2 ; 1 ; 1)$ est un vecteur directeur de (d ′).

3. Démontrer que les droites (d) et (d ′) ne sont pas coplanaires.

4. On considère le point H de coordonnées $(-3 ; 3 ; 5)$ et le point H′ de coordonnées $(3 ; 0 ; -4)$.

a. Vérifier que H appartient à (d) et que H′ appartient à (d ′).

b. Démontrer que la droite (HH′) est perpendiculaire aux droites (d) et (d ′).

c. Calculer la distance entre les droites (d) et (d ′), c'est- à- dire la distance HH′.

5. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\overrightarrow{MH'} \cdot \overrightarrow{HH'} = 126.$$

Antilles Guyane septembre 2007

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une urne contient 15 boules identiques indiscernables au toucher de couleur noire, blanche, ou rouge.
On sait de plus qu'il y a au moins deux boules de chaque couleur dans l'urne.
On tire au hasard simultanément 2 boules dans l'urne et on note leur couleur.
Soit l'évènement G : « obtenir deux boules de même couleur ».

Partie A

On suppose que l'urne contient 3 boules noires et 7 boules banches.
Calculer la probabilité de l'évènement G.

Partie B

On note n, b et r le nombre de boules respectivement noires, blanches et rouges figurant dans l'urne.

1. On note $g\,(n, b, r\,)$ la probabilité en fonction de n, b et r de l'évènement G.

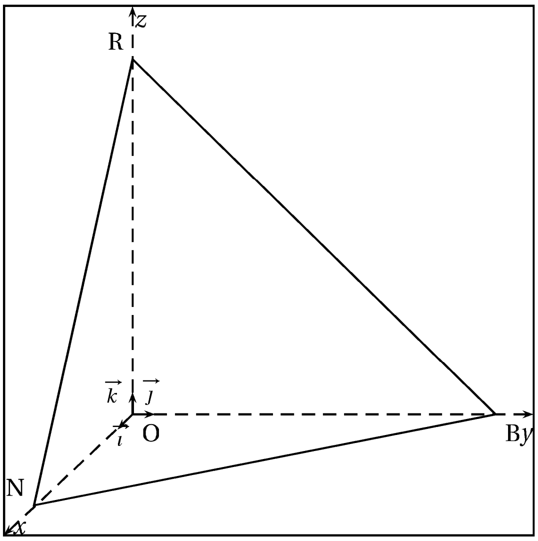
Démontrer que :

$$g\,(n, b, r\,) = \frac{1}{210}\,[n\,(n-1) + b\,(b-1) + r\,(r-1)].$$

2. Le but de cette question est de déterminer n, b et r afin que la probabilité $g\,(n, b, r\,)$ soit minimale.

L'espace est muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,,\,\vec{j}\,,\,\vec{k}\,)$ orthonormal.

Soient les points N, B et R de coordonnées respectives (15 ; 0 ; 0), (0 ; 15 ; 0) et (0 ; 0 ; 15) et soit M le point de coordonnées (n, b, r). On pourra se rapporter à la figure ci-dessous.



a. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (NBR) est $x + y + z - 15 = 0$.

b. En déduire que le point M est un point du plan (NBR).

c. Démontrer que $g\,(n, b, r\,) = \frac{1}{210}\,(\text{OM}^2 - 15)$.

d. Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (NBR).Déterminer les coordonnées du point H.

e. En déduire tes valeurs de n, b et r afin que la probabilité $g\,(n, b, r\,)$ soit minimale. Justifier que cette probabilité minimale est égale à $\frac{2}{7}$.

Partie C

On suppose que les nombres de boules de chaque couleur ont été choisis par l'organisateur d'un jeu, de telle sorte que la probabilité de l'évènement G soit $\frac{2}{7}$.

Un joueur mise x euros, avec x entier naturel non nul, puis tire simultanément au hasard deux boules de l'urne. Dans tous les cas, il perd sa mise de départ.

S'il obtient deux boules de la même couleur, il reçoit k fois le montant de sa mise, avec k nombre décimal strictement supérieur à 1. Sinon, il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Calculer l'espérance E(X) de la variable X en fonction de x et de k.
2. Déterminer la valeur de k pour laquelle le jeu est équitable.

Antilles Guyane juin 2007

L'espace est rapporté au repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$). On considère les points A(3 ; 0 ; 6) et I(0 ; 0 ; 6), et l'on appelle (D) la droite passant par A et I.

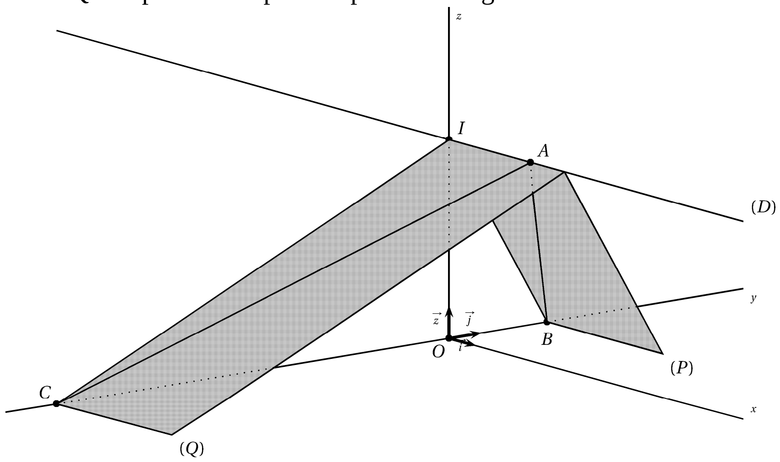
On appelle : (P) le plan d'équation $2y + z - 6 = 0$

et (Q) le plan d'équation $y - 2z + 12 = 0$.

1. Démontrer que (P) et (Q) sont perpendiculaires.
2. Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est la droite (D).
3. Démontrer que (P) et (Q) coupent l'axe (O ; $\vec{j}$) et déterminer les coordonnées des points B et C, intersections respectives de (P) et (Q) avec l'axe (O ; $\vec{j}$).
4. Démontrer qu'une équation du plan (T) passant par B et de vecteur normal $\overrightarrow{AC}$ est : $x + 4y + 2z - 12 = 0$.
5. Donner une représentation paramétrique de la droite (OA).

Démontrer que la droite (OA) et le plan (T) sont sécants en un point H dont on déterminera les coordonnées.

6. Que représente le point H pour le triangle ABC? Justifier.



Liban Juin 2007

Pour chacune des 5 *propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.*

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la droite (d) dont un système d'équations paramétriques est :

$$\begin{cases} x = 2 - \dfrac{t}{2} \\ y = 1 \\ z = 5 - \dfrac{3t}{2} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

On note A le point de coordonnées $(2 ; -1 ; 1)$, B le point de coordonnées $(4 ; -2 ; 2)$ et C le point de (d) d'abscisse 1.

1. **Proposition 1 :** « La droite (d) est parallèle à l'axe $(O ; \vec{j})$ ».

2. **Proposition 2 :** « Le plan P d'équation $x + 3z - 5 = 0$ est le plan passant par A et orthogonal à (d) ».

3. **Proposition 3 :** « La mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est $\dfrac{\pi}{3}$ radians ».

4. Soit G le barycentre des points pondérés $(A ; -1)$, $(B; 1)$ et $(C; 1)$.

Proposition 4 : « Les segments [AG] et [BC] ont le même milieu ».

5. **Proposition 5** : « La sphère de centre C et passant par B coupe le plan P d'équation $x + 3z - 5 = 0$ ».

Métropole Juin 2007

L'espace est muni du repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient (P) et (P′) les plans d'équations respectives :

$$x + 2y - z + 1 = 0 \text{ et } -x + y + z = 0.$$

Soit A le point de coordonnées (0 ; 1 ; 1).

1. Démontrer que les plans (P) et (P′) sont perpendiculaires.

2. Soit (d) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} + t \\ y = -\dfrac{1}{3} \\ z = t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

Démontrer que les plans (P) et (P′) se coupent selon la droite (d).

3. Calculer la distance du point A à chacun des plans (P) et (P′).

4. En déduire la distance du point A à la droite (d).

Nouvelle Calédonie novembre 2007

Soit OABC un tétraèdre trirectangle (les triangles OAB, OBC, OCA sont rectangles en O). On note H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de ce tétraèdre.

1. *a*. Pourquoi la droite (OH) est- elle orthogonale à la droite (BC) ?

Pourquoi la droite (OA) est- elle orthogonale à la droite (BC) ?

b. Démontrer que les droites (AH) et (BC) sont orthogonales. On démontrera de façon analogue que les droites (BH) et (AC) sont orthogonales. Ce résultat est ici admis.

c. Que représente le point H pour le triangle ABC?

2. L'espace est maintenant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A(1 ; 0 ; 0), B(0 ; 2 ; 0) et C(0 ; 0 ; 3).

a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par O et orthogonale au plan (ABC).

c. Démontrer que le plan (ABC) et la droite (D) se coupent en un point H de coordonnées $\left(\frac{36}{49};\frac{18}{49};\frac{12}{49}\right)$.

3. *a*. Calculer la distance du point O au plan (ABC).

b. Calculer le volume du tétraèdre OABC. En déduire l'aire du triangle ABC.

c. Vérifier que le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des autres faces de ce tétraèdre.

Nouvelle Calédonie mars 2007

Pour tout cet exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1. <u>Question de cours :</u> Établir l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}$ (a, b, c) et un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

2. On considère les points A(1 ; 2 ; – 3), B(– 3 ; 1 ; 4) et C(2 ; 6 ; – 1).

a. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

b. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$2x - y + z + 3 = 0.$$

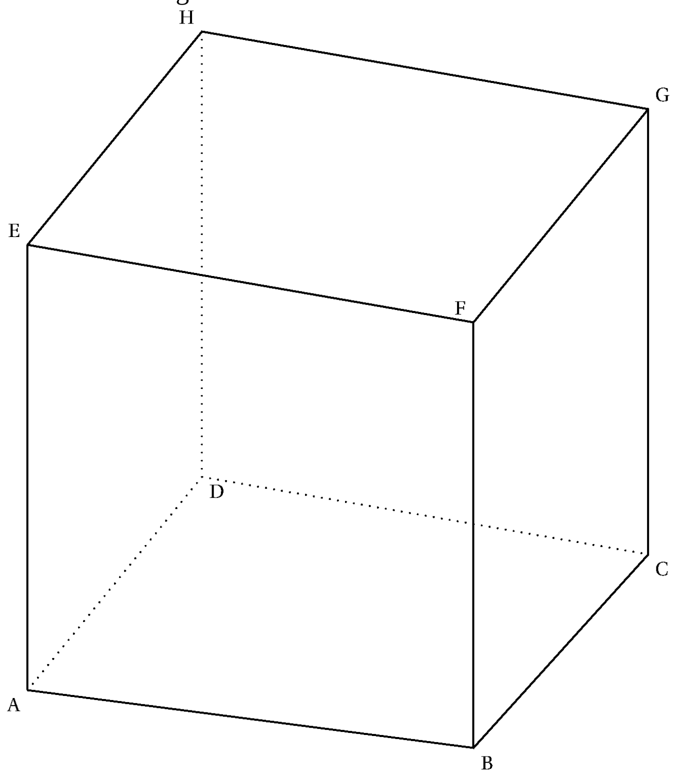
c. Soit I le point de coordonnées (– 5 ; 9 ; 4). Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite D passant par I et perpendiculaire au plan (ABC).

d. Déterminer les coordonnées du point J, intersection de la droite D et du plan (ABC).

e. En déduire la distance du point I au plan (ABC).

Polynésie septembre 2007

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 3.



On choisit le repère orthonormal $(D ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$, $\vec{j} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$, et $\vec{k} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$

1\. *a*. Donner les coordonnées des points A, C et E.

b. Déterminer les coordonnées du point L barycentre du système {(C ; 2), (E ; 1)}.

c. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$.

2\. Soit (a, b) un couple de réels. On note M le point de la droite (AE) tel que $\overrightarrow{AM} = a\,\overrightarrow{AE}$ et N le point de la droite (DL) tel que $\overrightarrow{DN} = b\,\overrightarrow{DL}$.

a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DL}$ si et seulement si le couple (a, b) vérifie le système $\begin{cases} -a + 2b = 1 \\ 3a - b = 0 \end{cases}$

b. En déduire qu'il existe un seul point M_0 de (AE) et un seul point N_0 de (DL) tels que la droite (M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL).

c. Déterminer les coordonnées des points M_0 et N_0 puis calculer la distance M_0N_0.

Polynésie juin 2007

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A\left(\frac{2}{3} ; -3 ; 2\right)$ et $B\left(-\frac{4}{3} ; 0 ; -4\right)$.

On note I le milieu du segment [AB] et (S) la sphère de diamètre [AB].

1. Soit E le barycentre des points pondérés (A ; 2) et (B; 1).

a. Calculer les coordonnées de E.

b. Montrer que l'ensemble (P) des points M de l'espace tels que $\left\| 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \right\| = 3\left\| \overrightarrow{MO} \right\|$ est le plan médiateur du segment [OE].

c. Montrer qu'une équation du plan (P) est $y = -1$.

2. a. Calculer le rayon de la sphère (S) et la distance du centre I de la sphère au plan (P).

En déduire que l'intersection (C) du plan (P) et de la sphère (S) n'est pas vide.

b. Montrer qu'une équation de (C) dans le plan (P) est :

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + (z+1)^2 = 12\,.$$

En déduire que (C) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3. Soit D le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{3} ; -\frac{1}{2} ; 4\sqrt{3}-1\right)$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (ID).

b. En déduire que la droite (ID) est sécante au cercle (C) en un point noté F dont on donnera les coordonnées.

Pondichéry avril 2007

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère le plan P d'équation $2x + y - 2z + 4 = 0$ et les points A de coordonnées (3 ; 2 ; 6), B de coordonnées (1 ; 2 ; 4), et C de coordonnées (4 ; − 2 ; 5).

1. *a.* Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.

b. Vérifier que ce plan est le plan P .

2. *a.* Montrer que le triangle ABC est rectangle.

b. Écrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par O et perpendiculaire au plan P .

c. Soit K le projeté orthogonal de O sur P. Calculer la distance OK.

d. Calculer le volume du tétraèdre OABC.

3. On considère, dans cette question, le système de points pondérés $S = \{(O, 3), (A, 1), (B, 1), (C, 1)\}$

a. Vérifier que ce système admet un barycentre, qu'on notera G.

b. On note I le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que G appartient à (OI).

c. Déterminer la distance de G au plan P .

4. Soit Γ l'ensemble des points *M* de l'espace vérifiant : $\left\| 3\,\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 5$.

Déterminer Γ. Quelle est la nature de l'ensemble des points communs à P et Γ ?

2004

France métropolitaine juin 2004

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève ½ point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.

Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne le point S (1 ; – 2 ; 0) et le plan P d'équation $x + y - 3z + 4 = 0$.

1. Une représentation paramétrique de la droite D passant par le point S et perpendiculaire au plan P est :

A : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t,\ t \in \mathbb{R} \\ z = -3 \end{cases}$ B : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t,\ t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - 3t \end{cases}$

C : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t,\ t \in \mathbb{R} \\ z = 3t \end{cases}$ D : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t,\ t \in \mathbb{R} \\ z = -3 - 3t \end{cases}$

2. Les coordonnées du point d'intersection H de la droite D avec le plan P sont :

A : (– 4 ; 0 ; 0) ; B : $\left(\frac{6}{5} ; \frac{-9}{5} ; \frac{-3}{5}\right)$;

C : $\left(\frac{7}{9} ; \frac{-2}{3} ; \frac{1}{3}\right)$; D : $\left(\frac{8}{11} ; \frac{-25}{11} ; \frac{9}{11}\right)$

3. La distance du point S au plan P est égale à :

A : $\frac{\sqrt{11}}{3}$; B : $\frac{3}{\sqrt{11}}$; C : $\frac{9}{\sqrt{11}}$; D : $\frac{9}{11}$

4. On considère la sphère de centre S et de rayon 3.

L'intersection de la sphère S et du plan P est égale :

A : au point I (1 ; – 5 ; 0)

B : au cercle de centre H et de rayon $r = \sqrt{\frac{10}{11}}$.

C : au cercle de centre S et de rayon $r = 2$

D : au cercle de centre H et de rayon $r = \frac{3\sqrt{10}}{11}$

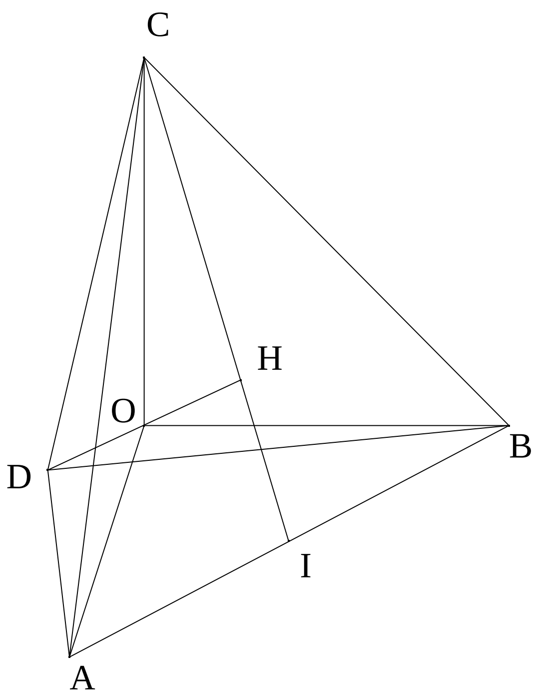
2003

Métropole juin 2003

Soient a un réel strictement positif et OABC un tétraèdre tel que :

- OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O.
- OA = OB = OC = a.

On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC, et D le point de l'espace défini par $\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OD}$.



1. Quelle est la nature du triangle ABC ?
2. Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle ABC.
3. Calcul de OH.

a. Calculer le volume V du tétraèdre OABC puis l'aire S du triangle ABC.

b. Exprimer OH en fonction de V et de S, en déduire que OH = $a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

4. Etude du tétraèdre ABCD.

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OA}},\frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OB}},\frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$.

a. Démontrer que le point H a pour coordonnées : $\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$.

b. Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont même longueur).

c. Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

Démontrer que Ω est un point de la droite (OH) puis calculer ses coordonnées.

2001

Amérique du Nord Juin 2001

L'espace E est rapporté au repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$). On considère les trois points A(2, 0, 0), B(1, 1, 0) et C(3, 2, 6).

(D) est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ (0, 1, 1) et (Δ) la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{v}$ (1, –2, 2).

1. Écrire une représentation paramétrique de chacune des droites (D) et (Δ) puis montrer que (D) et (Δ) sont sécantes en un point dont on précisera les coordonnées.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ puis écrire une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Soit H le projeté orthogonal du point F(2, 4, 4) sur le plan (ABC) .

a. Expliquer pourquoi il existe un réel *k* non nul tel que $\overrightarrow{FH} = k\ \vec{w}$.

b. Déterminer la valeur de *k* et en déduire les coordonnées de H.

c. Calculer le volume du tétraèdre FABC.

Métropole septembre 2001

Soient trois points de l'espace, A , B , C non alignés et soit k un réel de l'intervalle [– 1 ; 1].

On note G_k le barycentre du système $\{(A, k^2 + 1), (B, k), (C, -k)\}$.

1. Représenter les points A, B , C , le milieu I de [BC] et construire les points G_1 et G_{-1}.

2. *a*. Montrer que pour tout réel k de l'intervalle [– 1 ; 1] , on a l'égalité :

$$\overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$$

b. Établir le tableau de variation de la fonction f définie sur [– 1 ; 1] par : $f(x) = \dfrac{-x}{x^2+1}$

c. En déduire l'ensemble des points G_k quand k décrit l'intervalle [– 1 ; 1].

Pour la suite de l'exercice, aucune figure n'est demandée sur la copie.

3. Déterminer l'ensemble E des points M de l'espace tels que :

$$\left\| 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\|.$$

4. Déterminer l'ensemble F des points M de l'espace tels que :

$$\left\| 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right\| = \left\| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \right\|.$$

5. L'espace est maintenant rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les points A, B, C ont pour coordonnées respectives (0 ; 0 ; 2) , (– 1 ; 2 ; 1) et (– 1 ; 2 ; 5) . Le point G_k et les ensembles E et F sont définis comme ci-dessus.

a. Calculer les coordonnées de G_1 et G_{-1}. Montrer que les ensembles E et F sont sécants.

b. Calculer le rayon du cercle C intersection de E et F .