EXERCICE 1 (5 points)
Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis.
On sait également que 30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis.
PARTIE A
On choisit au hasard un membre de cette association et on note
F l'événement « le membre choisi est une femme »,
T l'événement « le membre choisi adhère à la section tennis ».

1. Montrer que la probabilité de l'événement F est égale à $\frac{2}{5}$.

2. On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis.
Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?

PARTIE B
Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie.
1. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard et de manière indépendante pour tenir la loterie.
a. Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.
b. Pour tout entier naturel *n* non nul, on note p_n la probabilité pour qu'en *n* semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.
Montrer que pour tout entier *n* non nul, $p_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$.
c. Déterminer le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geq 0{,}99$.
2. Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons ; 10 jetons exactement sont gagnants et rapportent 20 euros chacun, les autres ne rapportent rien.
Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5 € puis tire au hasard et de façon simultanée deux jetons de l'urne : il reçoit alors 20 euros par jeton gagnant. Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.
On note X la variable aléatoire associant le gain algébrique (déduction faite des 5 €) réalisé par un joueur lors d'une partie à cette loterie,
a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

EXERCICE 2 (5 points)
PARTIE A. Restitution organisée de connaissances

On rappelle que $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$

Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

PARTIE B
On considère la fonction *f* définie sur [1 ; + ∞ [par $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$
1. Soit *g* la fonction définie sur [1 ; + ∞ [par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$.
Montrer que la fonction *g* est positive sur [1 ; + ∞ [.

2. *a*. Montrer que, pour tout *x* de [1 ; + ∞ [, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
b. En déduire le sens de variation de *f* sur [1 ; + ∞ [.
c. Montrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C).
d. Étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D).
3. Pour tout entier naturel *k* supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse *k* de (C) et (D).
a. Montrer que, pour tout entier naturel *k* supérieur ou égal à 2, la distance M_kN_k entre les points M_k et N_k est donnée par $M_kN_k = \frac{\ln(k)}{k}$.
b. Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieure ou égale à 10^{-2}.

EXERCICE 3 (5 points)

Soit f une fonction définie et dérivable sur [0, 1] telle que :

$$f(0) = 0 \text{ et } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ pour tout } x \in [0, 1].$$

On ne cherchera pas à déterminer f.

Partie A

1. Déterminer le sens de variation de f sur [0, 1] .

2. Soit g la fonction définie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ par $g(x) = f(\tan(x))$

a. Justifier que g est dérivable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$ puis que, pour tout x de $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$, $g'(x) = 1$.

b. Montrer que, pour tout x de $\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$, $g(x) = x$.

En déduire que $f(1) = \frac{\pi}{4}$.

3. Montrer que, pour tout x de [0, 1] , $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}$.

Partie B

Soit (I_n) la suite définie par $I_0 = \int_0^1 f(x)\,dx$ et, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx$

1. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $I_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$.

2. *a*. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n \geq 0$.

b. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul n, $I_n \leq \frac{\pi}{4(n+1)}$.

c. En déduire la limite de la suite (I_n).

EXERCICE 4 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

Le plan complexe est rapporté â un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$

On considère l'application f du plan dans lui même qui, â tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = z^2$,

On note Ω le point d'affixe 1.

1. Déterminer l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que $f(M) = M$.

2. Soit A le point d'affixe $a = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$.

a. Exprimer a sous forme exponentielle.

b. En déduire les affixes des deux antécédents de A par f .

3. Déterminer l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tels que l'affixe z' du point M' soit un nombre imaginaire pur.

4. Dans cette question, on souhaite déterminer l'ensemble Γ_3 des points M distincts de Ω pour lesquels le triangle Ω M M' est rectangle isocèle direct en Ω.

a. Â l'aide de la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$, montrer que M est un point de Γ_3 si et seulement si $z^2 - iz - 1 + i = 0$ et $z \neq$

1.

b. Montrer que $z' - iz - 1 + i = (z-1)(z+1-i)$.

c. En déduire l'ensemble Γ_3.

5. Soit M un point d'affixe z différente de 0 et de 1.

a. Exprimer $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ en fonction d'un argument de z.

b. En déduire l'ensemble Γ_4 des points M distincts de O et de Ω tels que O, M et M' soient alignés.

EXERCICE 4 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit S la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = 5\,i\,z + 6\,i + 4$.

Partie A

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation S.
2. On note x et x', y et y' les parties réelles et imaginaires respectives de z et z'. Démontrer que $\begin{cases} x' = -5\,y + 4 \\ y' = 5\,x + 6 \end{cases}$.

Partie B

Dans cette partie, on se place dans le cas où les coordonnées x et y du point M sont des entiers relatifs tels que

$$-3 \leq x \leq 5 \text{ et } -3 \leq y \leq 5.$$

On note (E) l'ensemble de ces points M.

On rappelle que les coordonnées (x', y') du point M', image du point M par la transformation S, sont $x' = -5\,y + 4$ et $y' = 5\,x + 6$.

1\. *a*. Déterminer l'ensemble des couples (a, b) d'entiers relatifs tels que :

$$4\,a + 3\,b = 5.$$

b. En déduire l'ensemble des points M de (E) de coordonnées $(x ; y)$ tels que $-3\,x' + 4\,y' = 37$.

2\. Soient M un point de l'ensemble (E) et M' son image par la transformation S.

a. Démontrer que $x' + y'$ est un multiple de 5.

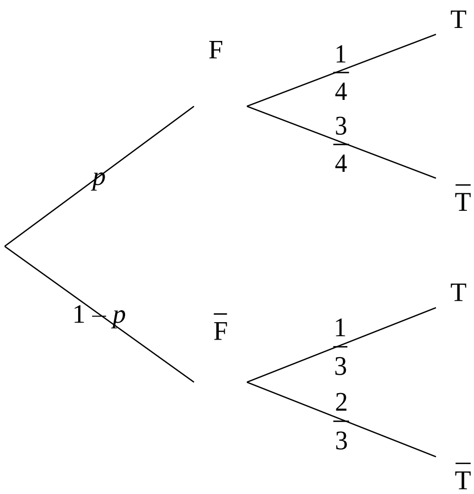
b. Démontrer que $x' - y'$ et $x' + y'$ sont congrus modulo 2.

En déduire que si $x'^2 - y'^2$ est multiple de 2 alors $x' - y'$ et $x' + y'$ le sont également.

c. Déterminer l'ensemble des points M de (E) tels que : $x'^2 - y'^2 = 20$.

CORRECTION

EXERCICE 1 (5 points)
PARTIE A



1. $p(\text{T}) = p(\text{F}) \times \frac{1}{4} + p(\overline{\text{F}}) \times \frac{1}{3} = 0{,}3 = \frac{3}{10}$

$p \times \frac{1}{4} + (1 - p) \times \frac{1}{3} = \frac{3}{10}$

$3\,p + 4\,(1 - p) = \frac{3 \times 12}{10}$ donc $4 - \frac{18}{5} = p$ donc $p = \frac{2}{5}$.

2. $p_{\text{T}}(\text{F}) = \dfrac{p(\text{F} \cap \text{T})}{p(\text{T})} = \dfrac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{3}$

PARTIE B

1. *a*. On a une succession de 4 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :
succès un membre adhère à la section tennis $p = 0{,}3$
échec : toutes les boules tirées ne sont pas blanches $q = 0{,}7$.
donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de fois qu'un membre adhère à la section tennis suit une loi binomiale de paramètres (4 ; 0,3).

$p(\text{X} = 3) = \binom{4}{2} \times 0{,}3^{2} \times 0{,}7^{2} = 0{,}2646$

b. l'événement « il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis » a pour événement contraire « il n'y a aucun membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis »

donc pour tout entier n non nul, $p_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$.

c. $p_n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{10}\right)^n \leq 1 - 0{,}99$

$\Leftrightarrow n \ln 0{,}7 \leq \ln 0{,}01 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}7}$ or $\frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}7} \approx 12{,}9$ donc

$p_n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow n \geq 13$

2. *a*. Un joueur doit payer 5 € puis tire au hasard et de façon simultanée deux jetons de l'urne donc le nombre de cas possibles est $\binom{100}{2} = 4950$

Soit il a deux jetons perdants et donc il perd – 5 €

le nombre de cas favorables est $\binom{90}{2} = 4005$ donc $p(\text{X} = -5) = \frac{4005}{4950}$

$p(\text{X} = -5) = \frac{89}{110}$

Soit il a deux jetons gagnants et donc il gagne $2 \times 20 - 5 = 35$ €

le nombre de cas favorables est $\binom{10}{2} = 45$ donc $p(\text{X} = 35) = \frac{45}{4950}$

$p(\text{X} = 35) = \dfrac{1}{110}$

Soit il a un jeton gagnant et un perdant et donc il gagne 20 – 5 = 15 €

le nombre de cas favorables est $\binom{10}{1} \times \binom{90}{1} = 900$ donc $p(\text{X} = 15) = \dfrac{900}{4950}$

$p(\text{X} = 15) = \dfrac{20}{110}$

la loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

x	-5	15	35
$p(\text{X} = x)$	$\dfrac{89}{110}$	$\dfrac{20}{110}$	$\dfrac{1}{110}$
$x\, p(\text{X} = x)$	$-\dfrac{445}{110}$	$\dfrac{300}{110}$	$\dfrac{35}{110}$

b. $\text{E(X)} = -\dfrac{445}{110} + \dfrac{300}{110} + \dfrac{35}{110} = -\dfrac{110}{110} = -1$

Sur un grand nombre de parties, le joueur perd en moyenne 1 €.

EXERCICE 2 (5 points)

PARTIE A. Restitution organisée de connaissances

Soit $x > 0$ donc soit $t = \ln(x)$ ou $x = e^t$

$\lim_{x \to +\infty} t = +\infty$

$\frac{\ln(x)}{x} = \frac{t}{e^t} = \frac{1}{\frac{e^t}{t}}$, or $\lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ donc $\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^t}{t}} = 0$

donc $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $[1 ; +\infty [$ par $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}$.

1. La fonction g définie sur $[1 ; +\infty [$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$ est la somme de fonctions dérivables sur $[1 ; +\infty [$: $x \to x^2 - 1$ et $x \to \ln x$ donc g est dérivable sur $[1 ; +\infty [$.

$g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$, $x > 0$ donc $g'(x) > 0$

g est strictement croissante sur $[1 ; +\infty [$ or $g(1) = 0$ donc pour tout x de $[1 ; +\infty [$, $g(x) \geq g(1)$ soit $g(x) \geq 0$

2. *a*. La fonction g définie sur $[1 ; +\infty [$ par $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}$ est la somme de fonctions dérivables sur $[1 ; +\infty [$: $x \to x$ et $x \to \frac{\ln(x)}{x}$ donc f est dérivable sur $[1 ; +\infty [$.

$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = 1 - \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$ donc pour tout x de $[1 ; +\infty [$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b. pour tout x de $[1 ; +\infty [$, $g(x) \geq 0$ donc $f'(x) \geq 0$

f est croissante sur $[1 ; +\infty [$.

c. $f(x) - x = -\frac{\ln(x)}{x}$ or $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$ donc la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.

d. $f(x) - x = -\frac{\ln(x)}{x}$ or pour tout $x > 1$, $\ln x > 0$ donc $f(x) - x > 0$ sur $] 1 ; +\infty [$ et $f(x) - x = 0$ quand $x = 1$

La courbe de f est en dessous de la droite D sur $] 1 ; +\infty [$ et le point A(1 ; 1) est un point commun à la courbe de f et à la droite D.

3. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de (C) et (D).

a. La courbe de f est en dessous de la droite D sur $] 1 ; +\infty [$ donc pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance $M_k N_k$ entre les points M_k et N_k est donnée par $M_k N_k = k - f(k) = \frac{\ln(k)}{k}$.

b. .

Variables	k est une variable du type entier
Initialisation	$k := 2$
Traitement	Tant que $\ln(k)/k > 10^{-2}$ Début du tant que $k := k + 1$ Fin du tant que
Sortie	Afficher k

EXERCICE 3 (5 points)
Partie A

1. $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ donc sur [0, 1], $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur [0 ; 1].

2. *a.* $g : \begin{cases} \left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right] \to [0\,;1] \to \mathbb{R} \\ x \xrightarrow{\tan} \tan x \xrightarrow{f} f(\tan x) \end{cases}$

La fonction tan est dérivable sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$, pour tout x de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$, $\tan x \in [0\,;1]$ et f est dérivable sur [0 ; 1] donc g est dérivable sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Règle utilisée : la dérivée de $u \circ v$ est $u' \times v' \circ u$

ici $v(x) = \tan x$ et $u = f$ donc $g'(x) = (1 + \tan^2 x) \times f'(\tan x)$ or $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ donc $f'(\tan x) = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$

donc $g'(x) = (1 + \tan^2 x) \times \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$. Pour tout x de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$, $g'(x) = 1$.

b. Pour tout x de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$, $g'(x) = 1$, donc, pour tout x de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$, $g(x) = x + k$ où k est une constante réelle.

$g(0) = f(\tan 0) = f(0) = 0$ donc $k = 0$ donc, pour tout x de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$, $g(x) = x$

pour tout x de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$, $g(x) = x$ donc $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ donc $f\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \dfrac{\pi}{4}$ or $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$ donc $f(1) = \dfrac{\pi}{4}$.

3. f est strictement croissante sur [0 ; 1], $f(0) = 0$ et $f(1) = \dfrac{\pi}{4}$ donc pour tout x de [0, 1] , $0 \le f(x) \le \dfrac{\pi}{4}$.

Partie B

1. Soit $\begin{cases} u'(x) = 1 & u(x) = x \\ v(x) = f(x) & v'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$ donc : $I_0 = \Big[\,x\,f(x)\,\Big]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x}{1+x^2}\,dx$

Si $u(x) = 1 + x^2$ alors $u'(x) = 2x$

donc $\dfrac{x}{1+x^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ or si u est une fonction dérivable strictement positive sir I, une primitive sur I de la fonction $\dfrac{u'}{u}$ est la fonction ln u donc $I_0 = \Big[\,x\,f(x)\,\Big]_0^1 - \left[\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1$

$I_0 = f(1) - 0 - \left(\dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{1}{2}\ln 1\right)$ or ln 1 = 0 et $f(1) = \dfrac{\pi}{4}$ donc $I_0 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln(2)$.

2. *a.* *b.* pour tout x de [0, 1] , $0 \le f(x) \le \dfrac{\pi}{4}$

Pour tout n entier naturel non nul n, et tout x de [0 ; 1] $x^n \ge 0$ donc : $0 \le x^n f(x) \le \dfrac{\pi}{4} x^n$

Les fonctions $x \to x^n f(x)$; $x \to \dfrac{\pi}{4} x^n$ sont continues sur [0 ; 1] donc $0 \le \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,dx \le \dfrac{\pi}{4}\int_0^1 x^n\,dx$

$\displaystyle\int_0^1 x^n\,dx = \left[\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$ donc $\dfrac{\pi}{4}\displaystyle\int_0^1 x^n\,dx = \dfrac{\pi}{4(n+1)}$. Pour tout n entier naturel non nul n, $0 \le I_n \le \dfrac{\pi}{4(n+1)}$.

c. Pour tout n entier naturel non nul n, $0 \le I_n \le \dfrac{\pi}{4(n+1)}$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} I_n = 0$

EXERCICE 4 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

1. f (M) = M $\Leftrightarrow z^2 = z \Leftrightarrow z^2 - z = 0 \Leftrightarrow z\,(z-1) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z = 1$

Γ_1 est l'ensemble des points O et Ω du plan.

2. *a*. $a = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,\mathrm{i} = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

b. Les affixes des antécédents de A par f sont solutions de l'équation : $z^2 = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

Mettons z sous forme exponentielle, il existe un réel r strictement positif et un réel θ tels que $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ alors $r^2\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} = 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ donc en égalant modules et arguments : $r^2 = 2$ et $2\theta = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

donc $r = \sqrt{2}$ et soit $\theta = -\dfrac{\pi}{8} + 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) soit $\theta = \pi - \dfrac{\pi}{8} + 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$)

Les antécédents de A sont les points d'affixes $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$ et $\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}}$.

3. Soit $z = x + \mathrm{i}\,y$ avec x et y réels

z' est un imaginaire pur $\Leftrightarrow z^2$ est un imaginaire pur $\Leftrightarrow (x + \mathrm{i}\,y)^2$ imaginaire pur

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2\,\mathrm{i}\,x\,y$ imaginaire pur

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0$

$\Leftrightarrow y = x$ ou $y = -x$

Γ_2 est donc la réunion des droites d'équation $y = x$ et $y = -x$.

4. Dans cette question, on souhaite déterminer l'ensemble Γ_3 des points M distincts de Ω pour lesquels le triangle Ω M M' est rectangle isocèle direct en Ω.

a. Soit r la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Soit z_1 l'affixe de l'image de M par la rotation r

L'écriture complexe de la rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ est :

$$z_1 - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega)$$

L'écriture complexe de r est $z_1 - 1 = \mathrm{i}\,(z - 1)$ soit $z_1 = \mathrm{i}\,z + 1 - \mathrm{i}$

Le triangle Ω M M' est rectangle isocèle direct en Ω $\Leftrightarrow r$(M) = M' et M ≠ Ω

$\Leftrightarrow z_1 = z^2 \Leftrightarrow \mathrm{i}\,z + 1 - \mathrm{i} = z^2$ et $z \neq 1$

M est un point de $\Gamma_3 \Leftrightarrow z^2 - \mathrm{i}\,z - 1 + \mathrm{i} = 0$ et $z \neq 1$.

b. $(z - 1)(z + 1 - \mathrm{i}) = (z - 1)(z + 1) - \mathrm{i}\,(z - 1)$

$(z - 1)(z + 1 - \mathrm{i}) = z^2 - 1 - \mathrm{i}\,z + \mathrm{i}$

$(z - 1)(z + 1 - \mathrm{i}) = z^2 - \mathrm{i}\,z - 1 + \mathrm{i}$

c. M est un point de $\Gamma_3 \Leftrightarrow z^2 - \mathrm{i}\,z - 1 + \mathrm{i} = 0$ et $z \neq 1$

$\Leftrightarrow (z - 1)(z + 1 - \mathrm{i}) = 0$ et $z \neq 1$

$\Leftrightarrow z = -1 + \mathrm{i}$

L'ensemble Γ_3 est réduit au point d'affixe $-1 + \mathrm{i}$.

5. *a*. $(\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{OM'}}) = \arg\left(\dfrac{z'}{z}\right)$ à 2π près

$(\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{OM'}}) = \arg\left(\dfrac{z^2}{z}\right)$ à 2π près

$(\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{OM'}}) = \arg z$ à 2π près.

b. M étant distinct de O et de Ω, les points O, M et M' sont alignés si et seulement si $(\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{OM'}}) = 0$ à 2π près ou $(\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{OM'}}) = \pi$ à 2π près et M ≠ O et M ≠ Ω

$\Leftrightarrow \arg z = 0 + 2k\pi$ ou $\arg z = \pi + 2k\pi$ et $z \neq 0$ et $z \neq 1$

$\Leftrightarrow z$ est un réel différent de 0 et 1.

L'ensemble Γ_4 des points M distincts de O et de Ω tels que O, M et M' soient alignés est l'axe des réels privé de O et Ω.

EXERCICE 4 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit S la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = 5\,i\,z + 6\,i + 4$.

Partie A

1. L'écriture complexe de S est de la forme $z' = a\,z + b$ avec $a \neq 0$ donc S est une similitude directe de rapport $|a| = 5$ et d'angle arg a soit $\frac{\pi}{2}$.

Le centre de S est le point invariant de S donc son affixe est solution de $z' = z$
$z = 5\,i\,z + 6\,i + 4 \Leftrightarrow z\,(1 - 5\,i) = 4 + 6\,i$
$\Leftrightarrow z = \frac{4+6\,i}{1-5\,i} = \frac{(4+6\,i)(1+5\,i)}{(1-5\,i)(1+5\,i)} = \frac{4+20\,i+6\,i-30}{1+5^2} = \frac{-26+26\,i}{26}$
$\Leftrightarrow z = -1 + i$
Le centre de S est le point d'affixe $-1 + i$.

2. $z' = x' + i\,y' = 5\,i\,(x + i\,y) + 6\,i + 4$
$\Leftrightarrow x' + i\,y' = 5\,i\,x - 5\,y + 6\,i + 4$
$\Leftrightarrow x' + i\,y' = (-5\,y + 4) + i\,(5\,x + 6)$
$-5\,y + 4 \in \mathbb{R}$ et $5\,x + 6 \in \mathbb{R}$

Deux complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et imaginaires sont égales donc $\begin{cases} x' = -5\,y + 4 \\ y' = 5\,x + 6 \end{cases}$

Partie B

1. *a*. $4 - 3 = 1$ donc $4 \times 5 - 3 \times 5 = 5$
$\begin{cases} 4\,a + 3\,b = 5 \\ 4 \times 5 + 3 \times (-5) = 5 \end{cases}$ donc par soustraction terme à terme :
$4\,(a - 5) + 3\,(b + 5) = 0$
$4\,(a - 5) = -3\,(b + 5)$
4 divise $-3\,(b + 5)$ or 4 est premier avec 3 donc d'après le théorème de Gauss 4 divise $b + 5$, il existe un entier relatif k tel que $b + 5 = 4\,k$
En remplaçant dans $4\,(a - 5) = -3\,(b + 5)$ alors $4\,(a - 5) = -3 \times 4\,k$
donc $a - 5 = -3\,k$
$a = -3\,k + 5$ et $b = 4\,k - 5$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Vérification :
$4\,a + 3\,b = 4\,(-3\,k + 5) + 3\,(4\,k - 5) = -12\,k + 20 + 12\,k - 15$
$4\,a + 3\,b = 5$ donc les solutions de l'équation $4\,a + 3\,b = 5$ sont les couples
$(-3\,k + 5 ; 4\,k - 5)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

b. $-3\,x' + 4\,y' = 37 \Leftrightarrow -3\,(-5\,y + 4) + 4\,(5\,x + 6) = 37$
$\Leftrightarrow 15\,y - 12 + 20\,x + 24 = 37$
$\Leftrightarrow 15\,y + 20\,x + 25$
$\Leftrightarrow 3\,y + 4\,x = 5$
$\Leftrightarrow x = -3\,k + 5$ et $y = 4\,k - 5$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$-3 \leq x \leq 5$ donc $-3 \leq -3\,k + 5 \leq 5$ soit $0 \leq 3\,k \leq 8$ donc $k \in \{0 ; 1 ; 2\}$
et $-3 \leq y \leq 5$ donc $-3 \leq 4\,k - 5 \leq 5$ soit $2 \leq 4\,k \leq 10$ donc $k \in \{1 ; 2\}$
k doit vérifier les deux conditions donc $k = 1$ ou $k = 2$
Si $k = 1$, $x = -3\,k + 5 = 2$ et $y = 4\,k - 5 = -1$
Si $k = 2$, $x = -3\,k + 5 = -1$ et $y = 4\,k - 5 = 3$

L'ensemble des points M tels que $-3\,x' + 4\,y' = 37$ est donc réduit aux points A(2 ; – 1) et B(– 1 ; 3).
A l'intérieur du carré limité par $-3 \leq x \leq 5$ et $-3 \leq y \leq 5$, la droite d'équation $3\,y + 4\,x = 5$ ne passe que par deux points à coordonnées entières A et B.

2. *a*. $x' + y' = (-5\,y + 4) + (5\,x + 6) = 5\,(x - y + 2)$
$x - y + 2$ est un entier relatif donc $5\,(x - y + 2)$ est un multiple de 5.
$x' + y'$ est un multiple de 5.
b. $x' + y' = 5\,(x - y + 2)$
or $5 \equiv 1\,[2]$ et $x - y + 2 \equiv x - y\,[2]$ donc $5\,(x - y + 2) \equiv x - y\,[2]$
donc $x' - y' \equiv x' + y'$ modulo 2.

$x'^2 - y'^2$ est multiple de 2 $\Leftrightarrow$ 2 divise $x'^2 - y'^2$
$\Leftrightarrow$ 2 divise $(x' + y')(x' - y')$

2 est un nombre premier donc soit 2 divise $x' + y'$ soit 2 divise $x' - y'$
soit $x' + y' \equiv 0$ modulo 2 soit $x' - y' \equiv 0$ modulo 2.
$x' - y' \equiv x' + y'$ modulo 2 donc
si $x' + y' \equiv 0$ modulo 2 alors $x' - y' \equiv 0$ modulo 2.
si $x' - y' \equiv 0$ modulo 2 alors $x' + y' \equiv 0$ modulo 2.
donc si $x'^2 - y'^2$ est multiple de 2 alors $x' - y'$ et $x' + y'$ le sont également.

c. $x'^2 - y'^2 = (x' + y')(x' - y')$
$x' + y' = 5(x - y + 2)$
$x' - y' = -5(x + y) + 2$
$x'^2 - y'^2 = 20 \Leftrightarrow 5(x - y + 2)[-5(x + y) + 2] = 20$
$\Leftrightarrow (x - y + 2)[-5(x + y) + 2] = 4$
$x - y + 2$ est un diviseur de 4 donc $x - y + 2 \in \{-4 ; -2 ; -1 ; 1 ; 2 ; 4\}$
d'où les possibilités :

$x - y + 2$	-4	-2	-1	1	2	4
$-5(x + y) + 2 = \dfrac{4}{x - y + 2}$	-1	-2	-4	4	2	1

$x - y$	-6	-4	-3	-1	0	2
$5(x + y)$	3	4	6	-2	0	1

seul 0 est divisible par 5 donc $\begin{cases} x - y = 0 \\ 5(x + y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$

(E) est réduit au point O.