Centre Etrangers Nov 95

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = e$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = \ln(u_n)$.

1. *a* : Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{2}$. En déduire la nature de la suite (v_n).

b : Donner l'expression de v_n en fonction de n . En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

2. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ...+ v_n \text{ et } P_n = u_0 \times u_1 \times ... \times u_n .$$

a : Montrer que $P_n = e^{S_n}$.

b : Exprimer S_n en fonction de n .

c : En déduire l'expression de P_n en fonction n .

3. Déterminer la limite de la suite (S_n). En déduire celle de la suite (P_n)

CORRECTION

a : On sait que pour $a > 0$, on a : $\ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$.

Donc, pour n entier naturel quelconque, on a : $v_{n+1} = \ln u_{n+1} = \ln \sqrt{u_n} = \dfrac{1}{2}\ln u_n = \dfrac{1}{2} v_n$

La suite (v) est donc une suite géométrique de raison et de premier terme
$v_0 = \ln(u_0) = \ln(e) = 1$.

b : L'expression de v_n en fonction de n est alors : $v_n = q^n v_0 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

Comme $v_n = \ln(u_n)$, on peut écrire que $u_n = e^{v_n}$. D'où l'expression de $u_n = e^{\frac{1}{2^n}}$.

2. *a* : Si a et b sont > 0 , alors $\ln(a\,b) = \ln(a) + \ln(b)$.
Donc, pour la somme S_n, on a : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$
$= \ln(u_0) + \ln(u_1) + \ln(u_2) + ... + \ln(u_n)$
$= \ln(u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n)$
$= \ln(P_n)$
Donc , on a bien $P_n = e^{S_n}$

b : S_n est la somme des ($n + 1$) premiers termes de la suite géométrique (v).
On sait alors que :

$$S_n = v_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

c : On en déduit alors que $P_n = e^{2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)}$.

Comme $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$.

Donc la suite (S) converge vers 2. Et la suite (P) converge vers e^2.