Asie juin 2004

On appelle (E) l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $9 + a^2$ où a est un entier naturel non nul ; par exemple $10 = 9 + 1^2$; $13 = 9 + 2^2$ etc.

On se propose dans cet exercice d'étudier l'existence d'éléments de (E) qui sont des puissances de 2, 3 ou 5.

1. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 2^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

a. Montrer que si a existe, a est impair.

b. En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.

2. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 3^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$.

a. Montrer que si $n \geq 3$, 3^n est congru à 1 ou à 3 modulo 4.

b. Montrer que si a existe, il est pair et en déduire que nécessairement n est pair.

c. On pose $n = 2p$ où p est un entier naturel, $p \geq 2$. Déduire d'une factorisation de $3^n - a^2$, que l'équation proposée n'a pas de solution.

3. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2 + 9 = 5n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

a. En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation n'a pas de solution si n est impair.

b. On pose $n = 2p$, en s'inspirant de **2 *c*** démontrer qu'il existe un unique entier naturel a tel que $a^2 + 9$ soit une puissance entière de 5.

CORRECTION

1. *a.* Si a existe tel que $a^{2+}9 = 2^n$, alors $a^2 = 2^n - 9$ or 2^n est pair donc a^2 est impair donc a est impair.

b. $2^2 \equiv 0\ (4)$ de plus $2^n = 2^{(n-2)} \times 2^2$ et $n \geq 4$, donc $n - 2 \geq 2$ donc $2^n \equiv 0\ (4)$

$9 \equiv 1\ (4)$ donc $a^2 + 9 \equiv a^2 + 1 \quad (4)$

a est impair donc de la forme $2k + 1$ donc $a^2 = 4k^2 + 4k + 1$ donc $a^2 \equiv 1\ (4)$ donc $a^2 + 1$ n'est pas divisible par 4.

L'équation proposée n'a pas de solution.

2. *a.* $3^2 \equiv 1\ (4)$ donc si $n = 2k$ ($k \geq 2$, $k \in \mathbb{Z}$) alors $3^n \equiv 1$ modulo 4

si $n = 2k + 1$ ($k \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}$) alors $3^n \equiv 3$ modulo 4

b. Si a existe, $a^2 + 9 = 3^n$ donc $a^2 + 1 \equiv 3^n\ (4)$ or a^2 est congru modulo 4 soit à 0 si a est pair soit à 1 si a est impair

Si a est pair alors $a^2 + 1 \equiv 1\ (4)$ donc $3^n \equiv 1\ (4)$ donc n est pair

Si a est impair alors $a^2 + 1 \equiv 2\ (4)$ donc $3^n \equiv 2\ (4)$ ce qui est impossible donc a n'est pas impair.

si a existe, il est pair et nécessairement n est pair.

c. $3^n - a^2 = 3^{2p} - a^2 = (3^p - a)(3^p + a) = 9$ donc $3^p + a$ divise 9, donc $3^p + a$ est égal à 1 ; 3 ou 9.

p est un entier naturel, $p \geq 2$ donc $3^p \geq 9$, a est un entier naturel non nul donc $a \geq 1$ donc $3^p + a \geq 9 + 1$ donc $3^p + a$ ne divise pas 9.

L'équation proposée n'a pas de solution.

3. *a.* $5 \equiv 2$ modulo 3, $5^2 \equiv 1$ modulo 3 donc $(5^2)^k \equiv 1^k$ modulo 3 soit $5^{2k} \equiv 1$ modulo 3 donc si n est pair $5^n \equiv 1$ modulo 3

$5^{2k+1} = 5^{2k} \times 5$ donc $5^{2k+1} \equiv 2$ modulo 3 donc si n est impair $5^n \equiv 2$ modulo 3

Les restes de a modulo 3 sont les naturels de 0 à 2. On calcule les restes de a^2 modulo 3:

a est congru modulo 3 à	0	1	2
a^2 est congru modulo 3 à	0	1	1
$a^2 + 9$ est congru modulo 3 à	0	1	1

$a^2 + 9$ est congru à 0 ou 1 modulo 3 et 5^n est congru à 2 modulo 3 si n est impair donc l'équation n'a pas de solution si n est impair.

b. Si $n = 2p$, $a^2 + 9 = 5^{2p}$ donc $5^{2p} - a^2 = 9$ soit $(5^p - a)(5^p + a) = 9$ donc $5^p + a$ divise 9, donc $5^p + a$ est égal à 1 ; 3 ou 9.

n est un entier naturel, $n \geq 2$ donc $p \geq 1$ et $5^p \geq 5$, a est un entier naturel non nul donc $a \geq 1$ donc $5^p + a \geq 5 + 1$ donc $5^p + a = 9$

$p \geq 1$ et $5^p \leq 9$ donc $p = 1$, $a = 4$ donc il existe un unique entier naturel a tel que $a^2 + 9$ soit une puissance entière de 5.