Nouvelle-Calédonie novembre 2016

On se place dans le plan complexe rapporté au repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.
Soit f la transformation qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

On note M le point d'affixe z et M′ le point d'affixe $f(z)$.

1. On appelle A le point d'affixe $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

a. Déterminer la forme exponentielle de a.

b. Déterminer la forme algébrique de $f(a)$.

2. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 1$.

3. Soit M un point d'affixe z du cercle C de centre O et de rayon 1.

a. Justifier que l'affixe z peut s'écrire sous la forme $z = e^{i\theta}$ avec θ un nombre réel.

b. Montrer que $f(z)$ est un nombre réel.

4. Décrire et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre réel.

CORRECTION

1. *a.* $|a| = \left|-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = 1$ et $\arg a = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ à 2π près donc $a = e^{i\frac{3\pi}{4}}$

b. $f(a) = e^{i\frac{3\pi}{4}} + \frac{1}{e^{i\frac{3\pi}{4}}} = e^{i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 2\cos\frac{3\pi}{4} = -\sqrt{2}$

2. $f(z) = 1 \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow z^2 + 1 = z$ et $z \neq 0$

$z^2 - z + 1 = 0$, $\Delta = -3$ donc $z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$

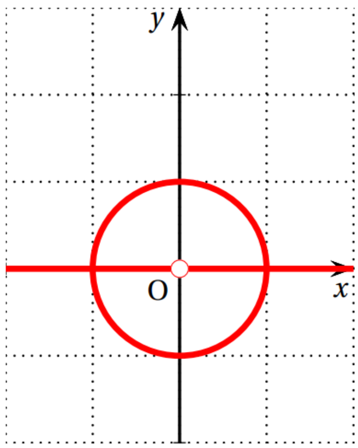
3. *a.* M un point d'affixe z du cercle C de centre O et de rayon 1 donc OM = 1 soit $|z| = 1$ donc il existe un réel θ tel que $z = e^{i\theta}$.

b. $f(z) = e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ donc $f(z)$ est un nombre réel.

4. $f(z)$ est un nombre réel $\Leftrightarrow f(z) = \overline{f(z)} \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow z - \bar{z} = \frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z} \Leftrightarrow$

$z - \bar{z} = \frac{z - \bar{z}}{z\bar{z}} \Leftrightarrow (z - \bar{z})\left(\frac{1}{z\bar{z}} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow z - \bar{z} = 0$ ou $z\bar{z} = 1$

$\Leftrightarrow z$ est réel non nul ou $|z| = 1$
M décrit soit l'axe des réels privé de O soit le cercle de centre O de rayon1.



On aurait pu aussi remplacer z par $x + iy$ avec x et y réels

$f(z)$ est un nombre réel $\Leftrightarrow x + iy + \frac{1}{x + iy}$ réel $\Leftrightarrow$

$x + iy + \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$ réel $\Leftrightarrow x + \frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$ réel

$\Leftrightarrow y - \frac{y}{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $x^2 + y^2 = 1$ avec $(x ; y) \neq (0 ; 0)$ d'où le résultat