La fonction tangente notée tan est définie pour tout réel x tel que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

1. a. Pour tout x de D l'ensemble de définition de la fonction tangente simplifier $\tan(x + \pi)$ puis $\tan(-x)$

1. b. En déduire la parité et la périodicité de la fonction tangente

2. a. Déterminer les valeurs (simplifiées) de $\tan 0$, $\tan \frac{\pi}{6}$, $\tan \frac{\pi}{4}$ et $\tan \frac{\pi}{3}$.

2. b. Déterminer a l'aide de la calculatrice la limite suivante : $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan x$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} \tan x$.

2. c. Simplifier les écritures de $\tan(\pi - x)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

3. a. Calculer tan'(x) et en déduire le tableau de variation complet de la fonction tan sur $\left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

3. b. Montrer que l'équation tan(x) =10 admet une unique solution sur $\left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

3. c. Tracer la courbe représentant la fonction tan sur $\left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et expliquer comment en déduire la courbe de la fonction tangente.

CORRECTION

1. a. Pour tout x de D :

$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)}$ or $\sin(x + \pi) = -\sin x$ et $\cos(x + \pi) = -\cos x$ donc $\tan(x + \pi) = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$.

$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}$ or $\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$ donc $\tan(-x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$.

1. b. Pour tout x appartenant à D, $\tan(-x) = \times \tan x$ donc la fonction tangente est impaire.

Pour tout x appartenant à D, $\tan(x + \pi) = \tan x$ donc la fonction tangente est périodique de période π.

2. a. $\tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0}$ or $\sin 0 = 0$ et $\cos 0 = 1$ donc $\tan 0 = 0$

$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}}$ or $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ et $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}}$ or $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\tan \frac{\pi}{4} = 1$

$\tan \frac{\pi}{3} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}}$ or $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ donc $\tan \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

2. b.

x	tan x
$\frac{\pi}{2} - 10^{-1}$	9,966644423
$\frac{\pi}{2} - 10^{-2}$	99,99666664
$\frac{\pi}{2} - 10^{-3}$	999,9996667
$\frac{\pi}{2} - 10^{-4}$	9999,999967
$\frac{\pi}{2} - 10^{-5}$	100000
$\frac{\pi}{2} - 10^{-6}$	1000000

x	tan x
$\frac{\pi}{2} + 10^{-1}$	– 9,96664442
$\frac{\pi}{2} + 10^{-2}$	– 99,9966666
$\frac{\pi}{2} + 10^{-3}$	– 999,999667
$\frac{\pi}{2} + 10^{-4}$	– 9999,99997
$\frac{\pi}{2} + 10^{-5}$	– 100000
$\frac{\pi}{2} + 10^{-6}$	– 1000000

donc $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} \tan x = -\infty$.

2. c. Pour tout x de D, tan (π – x) = $\dfrac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)}$ or sin (π – x) = sin x et cos (π – x) = – cos x

tan (π – x) = $\dfrac{\sin x}{-\cos x}$ = – tan x.

Pour tout x de D, $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)}$ or $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ = cos x et $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ = sin x donc $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{1}{\tan x}$.

3. a. tan x = $\dfrac{\sin x}{\cos x}$, soit $\begin{cases} u(x) = \sin x & u'(x) = \cos x \\ v(x) = \cos x & v'(x) = -\sin x \end{cases}$ donc tan'(x) = $\dfrac{\cos^2 x - (-\sin x)\sin x}{(\cos x)^2} = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

La fonction tan est donc strictement croissante sur chaque intervalle de son domaine de définition.

x	0 $\quad\quad$ $\dfrac{\pi}{2}$
tan'(x)	+
tan	0 ↗ + ∞

3. b. La fonction tan est définie continue strictement croissante sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, tan (0) = 0 et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty$, 10 est compris entre tan (0) et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan x$ donc l'équation tan(x) = 10 admet une unique solution sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

3. c. La fonction tangente est impaire donc sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère, la courbe représentative de la fonction tan étant tracée sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, on obtient par symétrie par rapport à O, la courbe sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right]$

La fonction tangente est périodique de période π donc par translation de vecteur $\pi\vec{i}$, on obtient le tracé de la courbe sur $\left]\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{3\pi}{2}\right[$, puis par translation de vecteur $\pi\vec{i}$, on obtient le tracé de la courbe sur $\left]\dfrac{3\pi}{2}\,;\dfrac{5\pi}{2}\right[$ etc.

pour avoir la courbe sur $\left]-\dfrac{3\pi}{2}\,;-\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{5\pi}{2}\,;-\dfrac{3\pi}{2}\right[$, il suffit de tracer le symétrique par rapport à O de la partie de courbe déjà tracée sur $\left]\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3\pi}{2}\,;\dfrac{5\pi}{2}\right[$ etc. Pour tracer la fonction sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$:

x	tan x
0	0
0,2	0,20
0,4	0,42
0,6	0,68
0,8	1,03
1	1,56
1,2	2,57
1,4	5,80
1,5	14,10