La suite (u_n) est définie par la donnée de son premier terme u_0 et de la relation de récurrence $u_{n+1} = a\, u_n + b$, où a et b sont des nombres réels fixés.

1. Etudier la suite u_n lorsque $a = 0$ et $a = 1$

2. On suppose, dans cette question que a appartient $\mathbb{R} \setminus \{0 ; 1\}$.

a. On suppose que la suite converge; déterminer sa limite L.

b. Etudier la suite (v_n) définie sur N par $v_n = u_n - \mathrm{L}$.

c. En déduire à quelle condition la suite (u_n) converge vers L.

CORRECTION

1. Si $a = 0$ et $b = 1$ alors pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n$ donc la suite est constante et égale à u_0.

2. *a.* Si la suite (u_n) converge vers L alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \mathrm{L}$ or pour tout entier n, $u_{n+1} = a\, u_n + b$, donc par passage à la limite : $\mathrm{L} = a\,\mathrm{L} + b$ donc $\mathrm{L}\,(1 - a) = b$.

$a \neq 1$ donc $\mathrm{L} = \dfrac{b}{1-a}$.

b. $\begin{cases} u_{n+1} = a\, u_u + b \\ v_n = u_n - \mathrm{L} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{n+1} = a\, u_u + b \\ u_n = v_n + \mathrm{L} \end{cases}$ donc en remplaçant u_n par $v_n + \mathrm{L}$ dans la relation de récurrence :

$v_{n+1} + \mathrm{L} = a\,(v_n + \mathrm{L}) + b$ soit $v_{n+1} = a\, v_n + a\,\mathrm{L} + b - a \Leftrightarrow v_{n+1} = a\, v_n + \mathrm{L}\,(a - 1) + b$

or $\mathrm{L} = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{-b}{a-1}$ donc $\mathrm{L}\,(a - 1) + b = \dfrac{-b}{a-1}(a-1) + b = -b + b = 0$ donc $v_{n+1} = a\, v_n$

La suite (v_n) est géométrique de raison a de premier terme $v_0 = u_0 + \mathrm{L}$

c. Pour tout entier n, $v_n = a^n\, v_0$ donc $u_n = a^n\, v_0 + \mathrm{L}$.

Rappel de cours :

$$\begin{cases} \text{Si } -1 < a < 1 \text{ alors} & \lim_{n\to+\infty} a^n = 0 \\ \text{Si } a = 1 \text{ alors} & \lim_{n\to+\infty} a^n = 1 \\ \text{Si } a > 1 \text{ alors} & \lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty \\ \text{Si } a \leq -1 & (a^n) \text{ n'admet pas de limite} \end{cases}$$

$a = 1$ est exclu pour cette question donc (u_n) converge vers L si et seulement si $-1 < a < 1$.