L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \frac{3}{2}$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{n u_n + 1}{2(n+1)}.$$

Partie A - Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de suite, un élève propose l'algorithme ci-contre. a oublié de compléter deux lignes.

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5

Traitement :	TANT QUE $n < 9$
	  Affecter à u la valeur …..
	  Affecter à n la valeur …..
	Fin TANT QUE

Sortie :	Afficher la variable u

1. Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.

2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?

3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	….	99	100
u_n	1,5	0,625	0,375	0,2656	0,2063	0,1693	…..	0,0102	0,0101

Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B - Étude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geq 1$; $v_n = n u_n - 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

2. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $u_n = \frac{1+(0,5)^n}{n}$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Justifier que, pour tout entier $n > 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\frac{1+(1+0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}$.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Partie C - Retour à l'algorithmique

En s'inspirant de la partie A, écrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n < 0,001$.

CORRECTION

Partie A - Algorithmique et conjectures

1.

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement	TANT QUE $n < 9$ Affecter à u la valeur $\frac{nu+1}{2(n+1)}$ Affecter à n la valeur $n + 1$ Fin TANT QUE
Sortie :	Afficher la variable u

2.

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement :	TANT QUE $n < 9$ Affecter à u la valeur $\frac{nu+1}{2(n+1)}$ Afficher u Fin TANT QUE

3. Au vu des résultats, la suite (u_n) semble être décroissante et converger vers 0.

Partie B - Étude mathématique

1. $v_{n+1} = (n + 1)\, u_{n+1} - 1 = (n + 1)\, \frac{nu_n+1}{2(n+1)} - 1$

$v_{n+1} = \frac{nu_n+1}{2} - 1 = \frac{nu_n-1}{2}$ donc $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$

La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - 1 = \frac{1}{2}$ donc $v_n = q^{n-1} v_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = 0{,}5^n$

2. $v_n = n\,u_n - 1$ donc $n\,u_n = v_n + 1$ donc $u_n = \frac{v_n+1}{n} = \frac{(0{,}5)^n+1}{n}$

Pour tout entier $n \geq 1$, on a : $u_n = \frac{1+(0{,}5)^n}{n}$.

3. $-1 < 0{,}5 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$, or $u_n = \frac{1}{n}(1 + 0{,}5^n)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. Soit $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = \frac{nu_n+1}{2(n+1)} - u_n = \frac{nu_n+1-2nu_n-2u_n}{2(n+1)} \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{-nu_n-2u_n+1}{2(n+1)}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2(n+1)} \times \left[-((0{,}5)^n+1) - 2\,\frac{(0{,}5)^n+1}{n} + 1\right] \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2(n+1)} \times \left[-\frac{n\times(0{,}5)^n}{n} - \frac{2\times(0{,}5)^n+2}{n}\right]$$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2(n+1)} \times \left[-\frac{n\times(0{,}5)^n+2\times(0{,}5)^n+2}{n}\right] \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n(n+1)} \times \frac{2+(n+2)\times(0{,}5)^n}{2}$$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n(n+1)} \times \left(1+\left(\frac{n+2}{2}\right)\times(0{,}5)^n\right) \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n(n+1)} \times \left(1+(1+0{,}5n)\times(0{,}5)^n\right)$$

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1+(1+0{,}5n)(0{,}5)^n}{n(n+1)}$$

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)} \times \left(1+(1+0{,}5n)\times(0{,}5)^n\right) > 0$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Partie C - Retour à l'algorithmique

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5
Traitement :	TANT QUE $u \geq 0{,}001$ Affecter à u la valeur $\frac{nu+1}{2(n+1)}$ Affecter à n la valeur $n + 1$ Fin TANT QUE
Sortie :	Afficher la variable n