LIBAN juin 2016

Sur un court de tennis, un lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité.
Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-3} près.

Partie A

Le joueur s'apprête à recevoir une série de 20 balles.

1. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite ?
2. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite ?

Partie B

Le lance-balle est équipé d'un réservoir pouvant contenir 100 balles. Sur une séquence de 100 lancers, 42 balles ont été lancées à droite. Le joueur doute alors du bon fonctionnement de l'appareil. Ses doutes sont-ils justifiés ?

Partie C

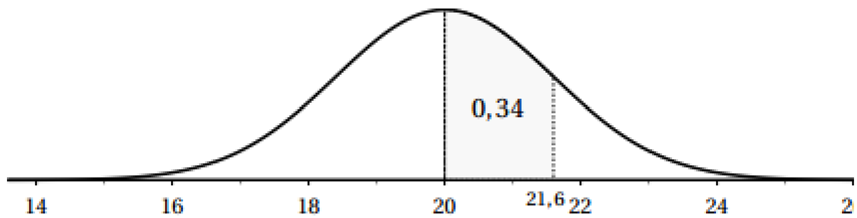
Pour augmenter la difficulté, le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit « liftées » soit « coupées ». La probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite est toujours égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche.
Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :

- La probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est 0,24 ;
- La probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est 0,235.

Si le lance-balle envoie une balle coupée, quelle est la probabilité qu'elle soit envoyée à droite ?

EXERCICE 4 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Sur le schéma ci-dessous, on a représenté la courbe de densité d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 20$.
La probabilité que la variable aléatoire X soit comprise entre 20 et 21,6 est égale à 0,34.



Affirmation 1 : La probabilité que la variable aléatoire X appartienne à l'intervalle $[23{,}2 ; +\infty[$ vaut environ 0,046.

CORRECTION

Partie A

1. On a une succession de 20 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elle *a* deux issues :

- réussite : le lance-balle envoie la balle à droite avec une probabilité $p = 0{,}5$
- échec : le lance-balle n'envoie pas la balle à droite avec une probabilité $q = 1 - p = 0{,}5$

donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de réussites suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0{,}5$.

La probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite est $P(X = 10) = 0{,}176$

2. La probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite est $P(5 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 4)$
$P(5 \leq X \leq 10) = 0{,}588 - 0{,}006 = 0{,}582$

Partie B

$n = 100$, $p = 0{,}5$ donc $n\,p = 50$, et $n\,(1 - p) = 50$ donc les conditions sont réunies pour déterminer un intervalle de fluctuation au seuil 95 %.

$$I = \left[\, 0{,}5 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}5 \times 0{,}5}{100}} \,;\, 0{,}5 + 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}5 \times 0{,}5}{100}} \,\right]$$ soit I = [0,402 ; 0,598]

Sur une séquence de 100 lancers, 42 balles ont été lancées à droite soit une fréquence $f = 0{,}42$ donc $f \in I$, les doutes ne sont pas justifiés, au risque d'erreur 5 %, l'appareil fonctionne bien.

Partie C

Soit les événements :

G : « la balle est envoyée à gauche »

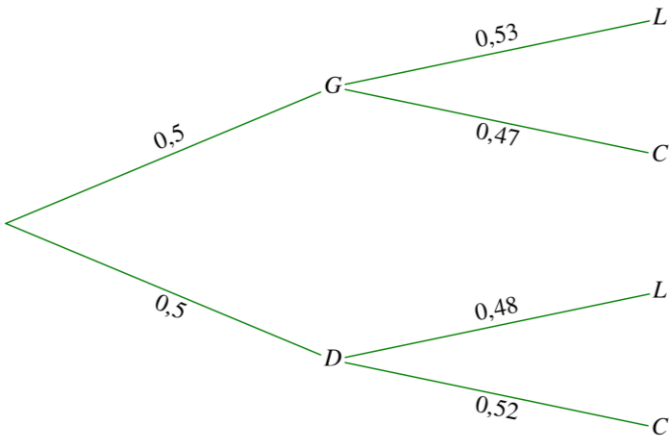
D : « la balle est envoyée à droite »

L : « la balle est liftée »

C : « la balle est coupée »

La probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est 0,24 donc $P(D \cap L) = 0{,}24 = 0{,}5 \times P_D(L)$ donc $P_D(L) = 0{,}48$

La probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est 0,235 donc $P(G \cap C) = 0{,}235 = 0{,}5 \times P_D(L)$



$P_G(L) = 0{,}47$

$P(C) = 0{,}5 \times 0{,}47 + 0{,}5 \times 0{,}52 = 0{,}495$

$P(D \cap C) = 0{,}5 \times 0{,}52 = 0{,}26$

$P_C(D) = \dfrac{0{,}26}{0{,}495} = 0{,}525$

EXERCICE 4 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Affirmation 1 : FAUSSE

Soit $T = \dfrac{X - 20}{\sigma}$, T suit une loi normale centrée réduite, $P(20 \leq X \leq 21{,}6) = 0{,}34 \Leftrightarrow P\left(0 \leq T \leq \dfrac{21{,}6 - 20}{\sigma}\right) = 0{,}34$ donc

$P\left(T \leq \dfrac{21{,}6 - 20}{\sigma}\right) = 0{,}34 + 0{,}5 = 0{,}84$ donc $\dfrac{1{,}6}{\sigma} = 0{,}994$ donc $\sigma \approx 1{,}6$ donc $P(X \geq 23{,}2) = 0{,}023$