Dans une population donnée, 15 % des individus ont une maladie M_a. Parmi les individus atteints de la maladie M_a, 20 % ont une maladie M_b et parmi les individus non atteints de la maladie M_a, 4 % ont la maladie M_b.
On prend un individu au hasard et on désigne respectivement par A et B les événements suivants :
" l'individu est atteint de la maladie M_a "
" l'individu est atteint de la maladie M_b"
$\overline{A}$ désigne l'événement contraire de A, P_A (B) désigne la probabilité de "B sachant A" c'est à dire la probabilité conditionnelle de B par rapport à A.

a : Donnez les valeurs de $p(A)$, $p_A(B)$ $p_{\overline{A}}(B)$

b : Calculez $p(B \cap A)$ et $p(B \cap \overline{A})$. Déduisez-en $p(B)$

c : Calculez $p_B(A)$

On prend 10 individus au hasard dans cette population et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de ceux ayant la maladie M_a et la maladie M_b.

a : Quelle est la loi de probabilité de X ?
(Donnez, en fonction de *k*, la probabilité $P(X = k)$, où $0 \leq k \leq 10$)

b : Déterminez la probabilité de l'événement "deux individus au plus sont atteints de la maladie M_a et la maladie M_b "

Dans cet exercice les résultats seront donnés sous forme décimale à 10^{-3} près.

CORRECTION

	M_a	non-M_a	Total
M_b	3	3,4	6,4
non-M_b	12	81,6	93,4
Total	15	85	100

1. D'après le texte ; 15% sont M_a ; parmi les malades M_a ; 20 % sont M_b, et parmi les non-M_a ; 4 % sont M_b. Ceci peut se traduire ; en utilisant les événements A et B par :

a) $p(A) = 0,15$: $p_A(B) = 0,20$: $p_{\overline{A}}(B) = 0,04$

b) On sait que $p(B \cap A) = p_A(B) \times p(A)$ donc : $p(B \cap A) = 0,15 \times 0,20 = 0,03$
$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$ donc $p(B \cap \overline{A}) = 0,85 \times 0,04 = 0,034$.
D'après la loi des Probabilités Totales ; on a donc : $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A}) = 0,03 + 0,034 = 0,064$.

c) En utilisant la définition de la probabilités conditionnelles "A sachant B" ; comme on connaît $p(B / A)$, on obtient : $p_B(A) = \dfrac{3}{6,4} = 0,46875$.

2. Dans cette question ; on est obligé de supposer que les choix sont indépendants les uns des autres, sinon, on ne peut pas répondre aux questions.

a) Dans ce cas ; si X est la variable aléatoire correspondant au nombre d'individus atteints des Maladies M_a et M_b ; alors X suit une loi binomiale de paramètres
$n = 10$ et $p = 0,03$.
Donc ; pour tout *k* compris entre 0 et 10,on a :
$p(X = k) = C_{10}^{k} \times 0,03^{k} \times 0,97^{10-k}$.

b) En particulier ; on cherche : $p(X \leq 2)$. Comme X prend des valeurs entières entre 0 et 10,on a donc :
$p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2)$.
$p(X \leq 2) = (0,97)^{10} + 10\,(0,03)^{1}(0,97)^{9} + 45\,(0,03)^{2}\,(0,97)^{8}$ dont une valeur approchée est : 0,997235