

1. On considère l'équation (E) : $17x - 24y = 9$, où (x, y) est un couple d'entiers relatifs.
 - a. Vérifier que le couple $(9 ; 6)$ est solution de l'équation (E).
 - b. Résoudre l'équation (E).
2. Dans une fête foraine, Jean s'installe dans un manège circulaire représenté par le schéma ci-dessous. Il peut s'installer sur l'un des huit points indiqués sur le cercle.

Le manège comporte un jeu qui consiste à attraper un pompon qui, se déplace sur un câble formant un carré dans lequel est inscrit le cercle. Le manège tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, à vitesse constante. Il fait un tour à vitesse constante. Il fait un tour en 24 secondes. Le pompon se déplace dans le même sens à vitesse constante. Il fait un tour en 17 secondes.

Pour gagner, Jean doit attraper le pompon, et il ne peut le faire qu'aux points de contact qui sont notés A, B, C et D sur le dessin.

À l'instant $t = 0$, Jean part du point H en même temps que le pompon part du point A.

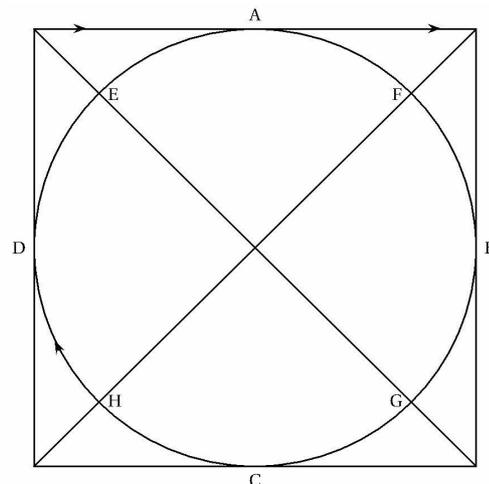
a. On suppose qu'à un certain instant t Jean attrape le pompon en A. Jean a déjà pu passer un certain nombre de fois en A sans y trouver le pompon. À l'instant t , on note y le nombre de tours effectués depuis son premier passage en A et x le nombre de tours effectués par le pompon.

Montrer que (x, y) est solution de l'équation (E) de la question 1.

b. Jean a payé pour 2 minutes ; aura-t-il le temps d'attraper le pompon ?

c. Montrer, qu'en fait, il n'est possible d'attraper le pompon qu'au point A.

d. Jean part maintenant du point E. Aura-t-il le temps d'attraper le pompon en A avant les deux minutes ?



CORRECTION

1. a. $17 \times 9 - 24 \times 6 = 153 - 144 = 9$ donc le couple $(9 ; 6)$ est solution de l'équation (E).

b.
$$\begin{cases} 17x - 24y = 9 \\ 17 \times 9 - 24 \times 4 = 9 \end{cases}$$
 donc par différence membre à membre :

$$17(x - 9) - 24(y - 4) = 0$$

soit $17(x - 9) = 24(y - 4)$ donc 17 divise $24(y - 4)$ or 17 et 24 sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, 17 divise $y - 4$. Il existe un entier relatif k tel que $y - 4 = 17k$ donc en remplaçant dans $17(x - 9) = 24(y - 4)$, $x - 9 = 24k$

$$\text{donc } y = 17k + 4 \text{ et } x = 24k + 9$$

Vérification :

s'il existe un entier relatif k tel que $y = 17k + 4$ et $x = 24k + 9$ alors $17x - 24y = 17 \times 24k + 17 \times 9 - 24 \times 17k - 24 \times 4 = 9$

donc les solutions de (E) sont les couples $(24k + 9 ; 17k + 4)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

2. a. Si x est le nombre de tours effectués par le pompon, le temps écoulé est $t = 17x$

Si y est le nombre de tours effectués depuis le premier passage de Jean, le temps écoulé est égal au temps mis par Jean pour aller de H

à A plus le temps mis pour faire y tours soit $t = 24y + 24 \times \frac{3}{8} = 24y + 9$

Jean attrape le pompon donc $17x = 24y + 9$ soit $17x - 24y = 9$

(x, y) est solution de l'équation (E) de la question 1.

donc il existe un entier relatif k tel que $y = 17k + 4$ et $x = 24k + 9$ or $x \geq 0$ donc $k \geq 0$

b. D'après l'ensemble des solutions, le plus petit couple de nombres positifs vérifiant cette équation est le couple $(9 ; 4)$.

Le temps nécessaire à Jean pour attraper le pompon est au minimum : $t = 17 \times 9 = 153$ secondes.

En deux minutes Jean n'a pas le temps d'attraper le pompon.

c. En raisonnant comme au 2. a.

- Si Jean attrape le pompon au point B, on doit avoir $t = \frac{17}{4} + 17x = \frac{5}{8} \times 24 + 24y \Leftrightarrow 68x = 43 + 96y \Leftrightarrow 68x - 96y = 43$.

Or le PGCD de 68 et 96 est 4 qui ne divise pas 43, donc cette équation n'a pas de solutions entières.

- Si Jean attrape le pompon au point C, on doit avoir $t = \frac{17}{2} + 17x = \frac{7}{8} \times 24 + 24y \Leftrightarrow 34x = 25 + 48y \Leftrightarrow 34x - 48y = 25$.

Le PGCD de 34 et 48 est 2 qui ne divise pas 25, donc cette équation n'a pas de solutions entières.

- Si Jean attrape le pompon au point D, on doit avoir $t = \frac{51}{4} + 17x = \frac{1}{8} \times 24 + 24y \Leftrightarrow 68x = -39 + 96y \Leftrightarrow 68x - 96y = -39$.

Le PGCD de 68 et 96 est 4 qui ne divise pas 39, donc cette équation n'a pas de solutions entières.

Conclusion : Jean ne peut attraper le pompon qu'au point A.

d. Si Jean part de E, on a toujours : $t = 17x$ et pour Jean $t = \frac{1}{8} \times 24 + 24y = 3 + 24y$ d'où $17x = 3 + 24y \Leftrightarrow 17x - 24y = 3$.

Or $17 \times 3 - 24 \times 2 = 3$, donc le couple $(3 ; 2)$ est solution de cette équation.

Le temps nécessaire à Jean pour attraper le pompon est $t = 17 \times 3 = 51$ secondes qui sont inférieures aux deux minutes payées.