Convergence d'une suite définie par une intégrale

On considère la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}} \, dt$

1. φ est la fonction définie sur $[0 ; 2]$ par $\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$

a. Étudier les variation de φ sur $[0 ; 2]$

b. En déduire que pour tout réel t de $[0 ; 2]$, $\frac{3}{2} \leq \varphi(t) \leq \frac{7}{4}$.

c. Montrer que pour tout réel t de $[0 ; 2]$, $\frac{3}{2} e^{\frac{t}{n}} \leq \varphi(t) \, e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{7}{4} e^{\frac{t}{n}}$.

d. En déduire que $\frac{3}{2} n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right) \leq u_n \leq \frac{7}{4} n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right)$

e. On rappelle que $\lim_{h \to 0} \frac{e^{h} \; 1}{h} = 1$. Montrer que si la suite u possède une limite L alors $3 \leq L \leq \frac{7}{2}$.

2. *a*. Vérifier que pour tout t de $[0 ; 2]$, on a : $\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$. En déduire la valeur de $I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} \, dt$

b. Montrer que pour tout t de $[0 ; 2]$, on a : $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$

c. Démontrer que u est convergente, déterminer sa limite L

CORRECTION

1. *a*. $\varphi'(t) = \frac{1}{(t+2)^2}$

donc la fonction φ est strictement croissante sur $[0 ; 2]$

1. *b*. φ est strictement croissante sur $[0 ; 2]$

donc pour tout t de $[0 ; 2]$, $\varphi(0) \leq \varphi(t) \leq \varphi(2)$ soit $\frac{3}{2} \leq \varphi(t) \leq \frac{7}{4}$.

1. *c*. Pour tout t réel, et tout n entier naturel non nul, $\frac{t}{n} \in \mathbb{R}$ donc $e^{\frac{t}{n}} > 0$

or pour tout t de $[0 ; 2]$, $\frac{3}{2} \leq \varphi(t) \leq \frac{7}{4}$, donc en multipliant cette inégalité par $e^{\frac{t}{n}}$:

pour tout t de $[0 ; 2]$, $\frac{3}{2} e^{\frac{t}{n}} \leq \varphi(t) \, e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{7}{4} e^{\frac{t}{n}}$

1. *d*. Les fonctions $t \to \frac{3}{2} e^{\frac{t}{n}}$; $t \to \varphi(t) \, e^{\frac{t}{n}}$, $t \to \frac{7}{4} e^{\frac{t}{n}}$ sont continues sur $[0 ; 2]$, donc $\int_0^2 \frac{3}{2} e^{\frac{t}{n}} \, dt \leq \int_0^2 \varphi(t) \, e^{\frac{t}{n}} \, dt \leq \int_0^2 \frac{7}{4} e^{\frac{t}{n}} \, dt$

soit $\frac{3}{2} \int_0^2 e^{\frac{t}{n}} \, dt \leq u_n \leq \frac{7}{4} \int_0^2 e^{\frac{t}{n}} \, dt$

or une primitive de la fonction $t \to e^{\frac{t}{n}}$ est la fonction $t \to n \, e^{\frac{t}{n}}$

donc $\int_0^2 e^{\frac{t}{n}} \, dt = n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right)$

donc $\frac{3}{2} n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right) \leq u_n \leq \frac{7}{4} n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right)$

1. *e*. Soit $h = \frac{2}{n}$, $\frac{3}{2} n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right) = 3 \frac{e^{h} \; 1}{h}$ et $\frac{7}{4} n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right) = \frac{7}{2} \frac{e^{h} \; 1}{h}$

la limite quand n tend vers $+\infty$, de $\frac{2}{n}$ est 0, donc limite quand n tend vers $+\infty$, de h est 0

or limite quand h tend vers 0 de $\frac{e^{h} \; 1}{h}$ est 1, donc la limite quand n tend vers $+\infty$, de $\frac{3}{2} n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right)$ est 3 et est celle de $\frac{7}{4} n \left(e^{\frac{2}{n}} - 1 \right)$ est $\frac{7}{2}$

Donc si la suite (u_n) admet une limite L, on a $3 \leq L \leq \frac{7}{2}$.

2. *a*. Pour tout t de [0 ; 2], $2 - \frac{1}{t+2} = \frac{2(t+2)-1}{t+2} = \frac{2t+3}{t+2}$

donc une primitive de $t \to \frac{2t+3}{t+2}$ est la fonction $t \to 2t - \ln(t+2)$

donc $I = 4 - \ln 4 + \ln 2 = 4 - \ln 2$

2. *b*. Pour tout t de [0 ; 2], $0 \leq t \leq 2$ donc $0 \leq \frac{t}{n} \leq \frac{2}{n}$ donc $e^0 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$

soit pour tout t de [0 ; 2], $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$

2. *c*. Pour tout t de [0 ; 2], $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$ or $\frac{2t+3}{t+2} > 0$

donc $\frac{2t+3}{t+2} \leq \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}} \leq \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{2}{n}}$

donc les fonctions $t \to \frac{2t+3}{t+2}$; $t \to \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}}$; $t \to \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{2}{n}}$ sont continues sur [0 ; 2], donc $\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} \, dt \leq \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}} \, dt \leq$ $\int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{2}{n}} \, dt$

soit $I \leq u_n \leq e^{\frac{2}{n}} I$

la limite quand n tend vers $+\infty$, de $\frac{2}{n}$ est 0, donc limite quand n tend vers $+\infty$, de $e^{\frac{2}{n}}$ est 1

donc d'après le théorème des gendarmes, puisque les deux extrémités de l'inégalité ont la même limite I, u_n converge vers I soit vers $4 - \ln 2$.