Définition : Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, définie à partir d'un certain rang n_0 ($n_0 \in \mathbb{N}$).

La notation (u_n) désigne la suite en tant qu'objet mathématique (que l'on note parfois tout simplement u) et u_n désigne l'image de l'entier n (appelé encore terme d'indice n de la suite (u_n)), terme que l'on pourrait noter $u(n)$.

Le domaine de définition est nécessairement du type $[n_0, +\infty[$ où $n_0 \in \mathbb{N}$ (entiers n tels que $n \geq n_0$).

Sens de variation (ou monotonie) d'une suite

Définition : Soit (u_n) une suite de nombres réels.
* La suite (u_n) est **croissante** (à partir du rang n_0) si et seulement si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$.

* La suite (u_n) est **strictement croissante** (à partir du rang n_0) si et seulement si $u_{n+1} > u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$.

* La suite (u_n) est **décroissante** (à partir du rang n_0) si et seulement si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$.

* La suite (u_n) est **strictement décroissante** (à partir du rang n_0) si et seulement si $u_{n+1} < u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$.

* La suite (u_n) est **monotone** (à partir du rang n_0) si elle est croissante ou décroissante à partir du rang n_0.

* La suite (u_n) est **constante** lorsque $u_{n+1} = u_n$ pour tout entier n du domaine de définition de (u_n).

Techniques d'étude de la monotonie d'une suite:
si la suite est définie de façon simple, il suffit de déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$

Utilisable pour les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$
Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction définie sur un intervalle I, et pour tout n, $u_n \in$ I.
Si la fonction f est monotone sur I alors pour déterminer le sens de variation de la suite, il suffit de faire un raisonnement par récurrence.

Suite majorée, suite minorée, suite bornée

Une suite (u_n) est **majorée** lorsqu'il existe un réel M tel que, pour tout entier n, $u_n \leq$ M.

Une suite (u_n) est **minorée** lorsqu'il existe un réel m tel que, pour tout entier n, $m \leq u_n$.

Une suite (u_n) est **bornée** lorsqu'elle est minorée et majorée.

Attention : le majorant ou le minorant d'une suite sont des réels indépendants de n. Il *n'y a* pas d'unicité du majorant ou du minorant d'une suite.

Limite d'une suite quand n tend vers $+\infty$.

Définition : Une suite **converge** (ou est **convergente**, ou admet une limite finie) lorsqu'il existe un réel L tel que :
tout intervalle ouvert I centré en L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Lorsque (u_n) converge vers L, on note alors : $L = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Une suite non convergente est appelée suite **divergente.**
Propriété Si une suite (u_n) converge, alors sa limite L est unique.

Théorème de convergence :
Toute suite croissante et majorée converge.
Toute suite décroissante et minorée converge.

Remarque : ce théorème permet de dire que la limite existe, mais ne permet pas de déterminer cette limite.

Théorèmes de comparaison et d'encadrement
Comparaison : Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que pour tout n, $u_n \leq v_n$
* Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

* Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Théorème des « gendarmes »
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que, à partir d'un certain rang : $u_n \leq v_n \leq w_n$
si (u_n) et (w_n) convergent vers le même réel L alors (v_n) converge vers L.

Passage à la limite dans une inégalité
Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que pour tout entier n : $u_n \leq v_n$ (resp. $u_n < v_n$)
Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Attention : par passage à la limite, les inégalités strictes deviennent des inégalités larges.

Limites classiques :
si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$

si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

si $q \leq -1$ alors q^n n'admet pas de limite.

Propriété : si une suite (u_n) est définie par la donnée de son premier terme et pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$, si la suite converge vers le réel L et si f et continue en L alors L et solution de l'équation $f(x) = x$.

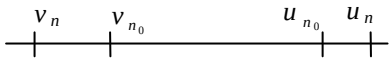
Remarque : en supposant la suite convergente, cette propriété permet de déterminer les valeurs possibles de la limite. Elle ne permet pas de montrer que la suite est convergente.
Il se peut que l'équation $f(x) = x$ admette plusieurs solutions, ce sont les encadrements obtenus précédemment de la limite L, qui permettent d'exclure éventuellement certaines solutions.

Suites adjacentes

Définition : Si (u_n) est croissante, (v_n) décroissante, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$ alors les suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes**

Propriété : Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite L.
De plus, pour tout n : $u_n \leq u_{n+1} \leq L \leq v_{n+1} \leq v_n$

Démonstration
Supposons (u_n) et (v_n) adjacentes avec (u_n) est croissante, (v_n) décroissante
Supposons qu'il existe un indice n_0 tel que $u_{n_0} > v_{n_0}$
La suite (u_n) est croissante donc pour tout $n \geq n_0$:
$u_n \geq u_{n_0}$
La suite (v_n) est décroissante donc pour tout $n \geq n_0$:
$v_n \leq v_{n_0}$
On a donc un schéma :



donc l'écart existant entre u_n et v_n est supérieur à celui qui existe entre u_{n_0} et v_{n_0} donc $u_n - v_n \geq u_{n_0} - v_{n_0}$
or $u_{n_0} > v_{n_0}$ donc $u_n - v_n \geq u_{n_0} - v_{n_0} > 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n \geq u_{n_0} - v_{n_0} > 0$
ce qui est en contradiction avec le fait que (u_n) et (v_n) sont adjacentes et donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$
L'hypothèse « il existe un indice n_0 tel que $u_{n_0} > v_{n_0}$ » conduit à une contradiction donc pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

(u_n) est croissante donc $u_0 \leq u_n$; (v_n) est décroissante donc $v_n \leq v_0$; donc pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_0 \leq u_n \leq l \leq l' \leq v_n \leq v_0$

(u_n) est croissante majorée par v_0 donc converge vers une limite l et $u_n \leq l$
(v_n) est décroissante minorée par u_0 donc converge vers une limite l' et $v_n \geq l'$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l - l' = 0$ donc $l = l' = L$
Donc pour tout n : $u_n \leq u_{n+1} \leq L \leq v_{n+1} \leq v_n$.