Partie 1

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps. Le graphique en annexe 1 représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps en jours.

On décide de modéliser cette croissance par une fonction logistique du type : $h(t) = \dfrac{a}{1+b\,e^{-0,04\,t}}$, où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres.

On sait qu'initialement, pour $t = 0$, le plant mesure 0,1 m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m.

Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

Partie 2

On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction f définie sur [0 ; 250] par $f(t) = \dfrac{2}{1+19\,e^{-0,04\,t}}$.

1. Déterminer $f'(t)$ en fonction de t (f' désignant la fonction dérivée de la fonction f). En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 250].
2. Calculer le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à 1,5 m.
3. *a*. Vérifier que pour tout réel t appartenant à l'intervalle [0 ; 250] on a :

$$f(t) = \frac{2\,e^{0,04\,t}}{e^{0,04\,t}+19}.$$

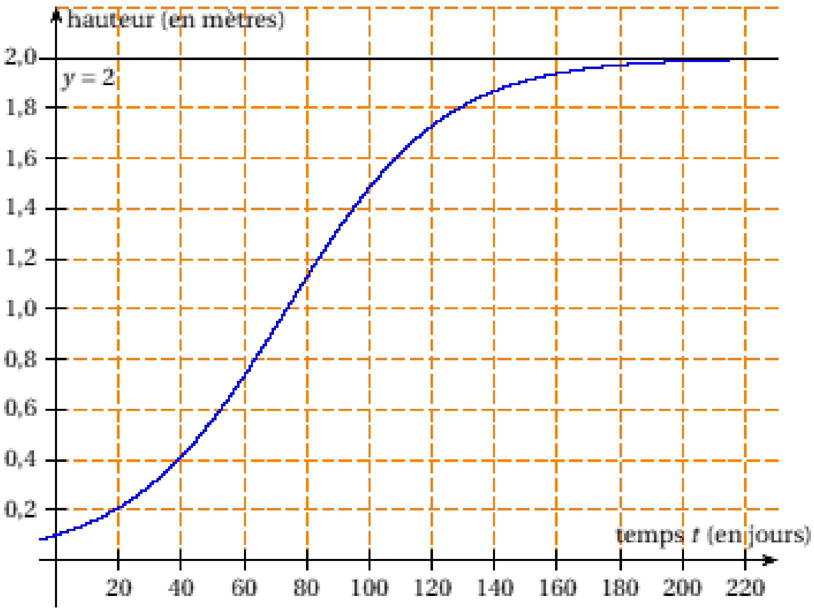
Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle [0 ; 250] par :

$$F(t) = 50\ln(e^{0,04\,t}+19)$$

est une primitive de la fonction f.

b. Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle [50 ; 100].
En donner une valeur approchée à 10^{-2} près et interpréter ce résultat.

4. On s'intéresse à la vitesse de croissance du plant de maïs ; elle est donnée par la fonction dérivée de la fonction f.
La vitesse de croissance est maximale pour une valeur de t.
En utilisant le graphique donné en annexe, déterminer une valeur approchée de celle-ci. Estimer alors la hauteur du plant.



CORRECTION

Partie 1

Initialement, pour $t = 0$, le plant mesure 0,1 m donc $h(0) = 0,1$ soit $\dfrac{a}{1+b} = 0,1$ soit $10\,a = 1 + b$

Sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m donc $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = 2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,04\,t} = 0$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = a$ d'où le système $\begin{cases} 10\,a - b = 1 \\ a = 2 \end{cases}$ donc $a = 2$ et $b = 19$

$h(t) = \dfrac{2}{1+19\,e^{-0,04\,t}}$

Partie 2

1. Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, la dérivée de la fonction $\frac{1}{u}$ est $-\frac{u'}{u^2}$; la dérivée de la fonction e^v est $v' e^v$.

ici $v(t) = e^{-0,04t}$ donc $v'(t) = -0,04\, e^{-0,04t}$

$u(t) = 1 + 19\, e^{-0,04t}$ donc $u'(t) = -0,04 \times 19\, e^{-0,04t}$

$f'(t) = \frac{2 \times (-0,04 \times 19\, e^{-0,04t})}{(1+19\, e^{-0,04t})^2}$ soit $f'(t) = \frac{-1,52\, e^{-0,04t}}{(1+19\, e^{-0,04t})^2}$

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(t) < 0$ sur [0 ; 250]

La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle [0 ; 250].

2. Le plant de maïs atteint une hauteur supérieure à 1,5 $m \Leftrightarrow h(t) > 1,5$

$\frac{2}{1+19\, e^{-0,04t}} > 1,5 \Leftrightarrow 2 > 1,5\,(1 + 19\, e^{-0,04t}) \Leftrightarrow 2 > 1,5 + 28,5\, e^{-0,04t}$

$\Leftrightarrow 0,5 > 28,5\, e^{-0,04t} \Leftrightarrow e^{-0,04t} < \frac{0,5}{28,5} \Leftrightarrow e^{0,04t} > \frac{28,5}{0,5}$

$\Leftrightarrow e^{0,04t} > 57 \Leftrightarrow 0,04\,t > \ln 57 \Leftrightarrow t > \frac{\ln 57}{0,04}$

Le plant de maïs atteint une hauteur supérieure à 1,5 m après 102 jours

3. *a.* pour tout réel t appartenant à l'intervalle [0 ; 250] on a :

$f(t) = \frac{2}{1+19\, e^{-0,04t}} = f(t) = \frac{2\, e^{0,04t}}{(1+19\, e^{-0,04t})\, e^{0,04t}}$ donc $f(t) = \frac{2\, e^{0,04t}}{e^{0,04t}+19}$

Si u est une fonction strictement positive, dérivable sur un intervalle I, la dérivée de ln u est $\frac{u'}{u}$.

donc $F'(t) = 50\, \frac{0,04\, e^{0,04t}}{e^{0,04t}+19} = \frac{2\, e^{0,04t}}{e^{0,04t}+19} = f(t)$ donc la fonction F définie sur l'intervalle [0 ; 250] par : $F(t) = 50 \ln(e^{0,04t} + 19)$ est une primitive de la fonction f .

b. La valeur moyenne de f sur l'intervalle [50 ; 100] est :

$$V_m = \frac{1}{100-50}\int_{50}^{100} f(t)\,dt = \frac{1}{50}[\,F(100) - F(50)\,]$$

$V_m = \frac{1}{50}\,[\,50 \ln(e^{0,04\times 100} + 19) - 50 \ln(e^{0,04\times 50} + 19)\,]$ donc

$V_m = \ln(e^4 + 19) - \ln(e^{0,02} + 19)$ soit $V_m \approx 1,03$

$h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres

V_m désigne la hauteur moyenne d'un plant entre 50 et 100 jours donc, pendant la période située entre le 50ème et le 100ème jour, la hauteur moyenne d'un plant est de 1,03 m

4. $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente en x_0 à la courbe de f

Graphiquement, pour $x_0 \in [\,0\,;75\,]$, ces tangentes ont un coefficient directeur qui croît et pour $x_0 \in [\,75\,;250\,]$ ce coefficient directeur décroit donc la vitesse de croissance est maximale pour $t = 75$.

La vitesse maximale est alors d'environ $\frac{0,7}{25}$ soit environ 0,03, la hauteur du plan est environ de 1,02 m.