Sommaire

2010

Amérique du Nord juin 2010

À tout entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \dfrac{4\,\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^{nx}+7}$.

On désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$.
Les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ sont données en annexe.

Partie A : Étude de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = \dfrac{4\,\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+7}$

1. Vérifier que pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{4}{1+7\,\mathrm{e}^{-x}}$.

2. *a.* Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_1$ admet deux asymptotes dont on précisera des équations.

b. Démontrer que la fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c. Démontrer que pour tout réel x, $0 < f_1(x) < 4$.

3. *a.* Démontrer que le point I_1 de coordonnées (ln7 ; 2) est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_1$.

b. Déterminer une équation de la tangente (T_1) à la courbe $\mathscr{C}_1$ au point I_1.

c. Tracer la droite (T_1).

4. *a.* Déterminer une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer la valeur moyenne de f_1 sur l'intervalle [0 ; ln7].

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n.

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul le point A $\left(0\,;\dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_n$.

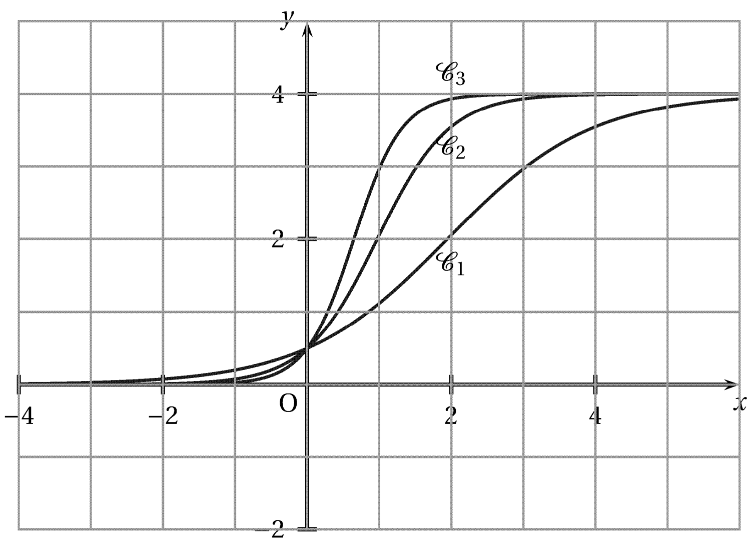
2. *a.* Démontrer que pour tout entier naturel n non nul la courbe $\mathscr{C}_n$ et la droite d'équation $y = 2$ ont un unique point d'intersection dont on précisera l'abscisse. On note I_n ce point d'intersection.

b. Déterminer une équation de la tangente (T_n) à la courbe $\mathscr{C}_n$ au point I_n.

c. Tracer les droites (T_2) et (T_3).

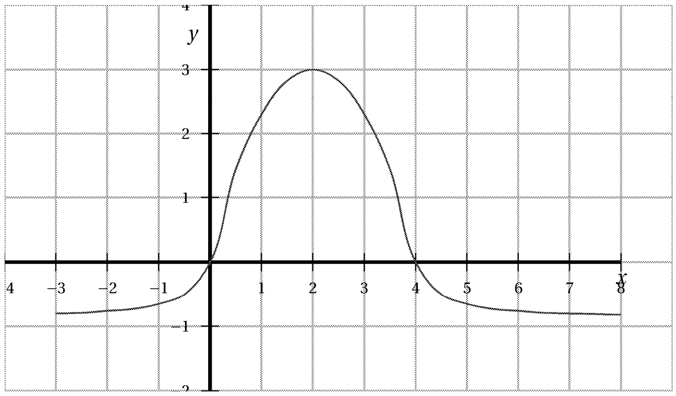
3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = \dfrac{n}{\ln 7}\displaystyle\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Montrer que la suite (u_n) est constante.



Antilles-Guyane septembre 2010

On donne la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $I = [-3\ ;\ 8]$.



On définit la fonction F sur I , par $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

1. *a*. Que vaut F(0) ?

b. Donner le signe de F(x) :

– pour $x \in [0\ ;\ 4]$;

– pour $x \in [-3\ ;\ 0]$.

Justifier les réponses.

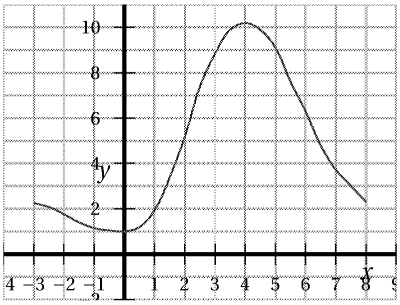
c. Faire figurer sur le graphique donné en ANNEXE les éléments permettant de justifier les inégalités $6 \leq F(4) \leq 12$.

2. *a*. Que représente f pour F ?

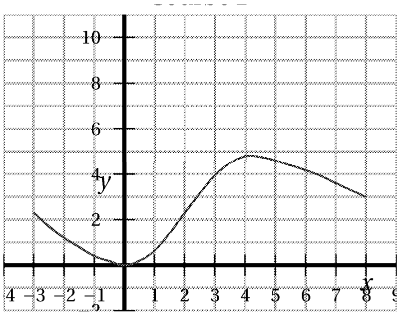
b. Déterminer le sens de variation de la fonction F sur I . Justifier la réponse à partir d'une lecture graphique des propriétés de f .

3. On dispose de deux représentations graphiques sur I.

Courbe A



Courbe B



L'une de ces courbes peut-elle représenter la fonction F ? Justifier la réponse.

Asie juin 2010

L'objectif de l'exercice est l'étude d'une fonction et d'une suite liée à cette fonction.

PARTIE A

On note f la fonction définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$. L'unité graphique est 1 cm.

1. Étude des limites

a. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.

b. Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.

c. Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe C ?

2. Étude des variations de la fonction f

a. Démontrer que, la fonction dérivée de la fonction f s'exprime, pour tout réel x strictement positif, par :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^4}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(2x+1).$$

b. Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$.

c. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$ et donner la valeur approchée de α arrondie au centième.

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

PARTIE B Étude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel $n \geq 2$ on considère l'intégrale I_n définie par : $I_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_2.

2. Une relation de récurrence

a. Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n \geq 2$: $I_{n+1} = \mathrm{e} - \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2^{n-1}} + (n-1)\,I_n$.

b. Calculer I_3.

3. Étude de la limite de la suite de terme général I_n.

a. Établir que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1\,;2]$, on a : $0 \leq \dfrac{1}{x^n}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \leq \dfrac{\mathrm{e}}{x^n}$.

b. En déduire un encadrement de I_n puis étudier la limite éventuelle de la suite (I_n).

La Réunion juin 2010

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

Partie A :

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions f , définies et dérivables sur l'intervalle $[\,0\ ;+\infty[$, vérifiant la condition (E) :

pour tout nombre réel x strictement positif, $x f'(x) - f(x) = x^2 \mathrm{e}^{2x}$.

1. Montrer que si une fonction f , définie et dérivable sur l'intervalle $[\,0\ ;+\infty[$, vérifie la condition (E), alors la fonction g définie sur l'intervalle $[\,0\ ;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ vérifie : pour tout nombre réel x strictement positif, $g'(x) = \mathrm{e}^{2x}$.

2. En déduire l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'intervalle $[\,0\ ;+\infty[$ qui vérifient la condition (E).

3. Quelle est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[\,0\ ;+\infty[$ qui vérifie la condition (E) et qui s'annule en $\dfrac{1}{2}$?

Partie B :

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[\,0\ ;+\infty[$ par : $h(x) = \dfrac{1}{2} x \mathrm{e}^{2x} - \dfrac{\mathrm{e}}{2} x$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}\ ;\vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel positif x, le signe de $h(x)$.

2. *a.* Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} x \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)\,\mathrm{d}x$.

b. En déduire, en unité d'aire, la valeur exacte de l'aire de la partie du plan située en dessous de l'axe des abscisses et au dessus de la courbe C .

Polynésie septembre 2010

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. On considère la suite (t_n) définie pour tout entier naturel n par : $t_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $t_{n+1} = t_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Proposition 1 : Pour tout entier naturel n, $t_n = \dfrac{n}{n+1}$.

2. On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que : pour tout entier naturel n, $u_n \leq w_n \leq v_n$.

Proposition 2 : Si les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors la suite (w_n) est convergente.

3. Soient f et g deux fonctions définies et continues sur l'intervalle $[0\ ;1]$.

Proposition 3 : Si $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ alors $f = g$ sur l'intervalle $[0\ ;1]$.

Pondichéry avril 2010

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :

- $\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
- Si pour tout $t \in [a, b]$ $f(t) \geq 0$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$.

Montrer que :

si, pour tout t de $[a\ ;\ b]$, $f(t) \leq g(t)$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

Partie B

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_n(x) = \ln(1 + x^n)$ et on pose $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. *a.* Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.

b. Étudier les variations de f_1 sur $[0, +\infty[$.

c. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 et interpréter graphiquement le résultat.

(Pour le calcul de I_1, on pourra utiliser le résultat suivant : pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$.)

2. *a.* Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $0 \leq I_n \leq \ln 2$.

b. Étudier les variations de la suite (I_n).

c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.

3. Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - x$,.

a. Étudier le sens de variation de g sur $[0, +\infty[$.

b. En déduire le signe de g sur $[0, +\infty[$.

Montrer alors que pour tout entier naturel n non nul, et pour tout x réel positif, on a $\ln(1 + x^n) \leq x^n$.

c. En déduire la limite de la suite (I_n).

2009

Amérique du Nord juin 2009

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On supposera connus les résultats suivants :

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a < b$.

- Si $u \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.
- Pour tous réels α et β, $\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a < b$ et si, pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ et on définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \text{ et}$$

pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. *a*. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] , $\frac{1}{\mathrm{e}} \leq f(x) \leq 1$.

b. En déduire que $\frac{1}{\mathrm{e}} \leq u_0 \leq 1$.

2. Calculer u_1.

3. *a*. Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n$.

b. Étudier les variations de la suite (u_n).

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. *a*. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

Amérique du Sud novembre 2009

Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale : $\mathrm{I} = \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\right)\mathrm{d}x$

1. ***a.*** Étudier les variations de la fonction : $f : x \rightarrow f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}$ sur l'intervalle [0 ; 1].

b. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1], on a : $\frac{1}{\mathrm{e}} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.

2. Soit J et K les intégrales définies par : $\mathrm{J} = \int_0^1 (2+x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{K} = \int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Au moyen d'une intégration par parties, prouver que : $\mathrm{J} = 3 - \frac{4}{\mathrm{e}}$.

b. Utiliser un encadrement de $f(x)$ obtenu précédemment pour démontrer que : $\frac{1}{3\mathrm{e}} \leq \mathrm{K} \leq \frac{1}{6}$.

c. Démontrer que $\mathrm{J} + \mathrm{K} = 4\,\mathrm{I}$.

d. Déduire de tout ce qui précède un encadrement de I , puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près de I .

Antilles-Guyane septembre 2009

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle] 0 ; 1] par :

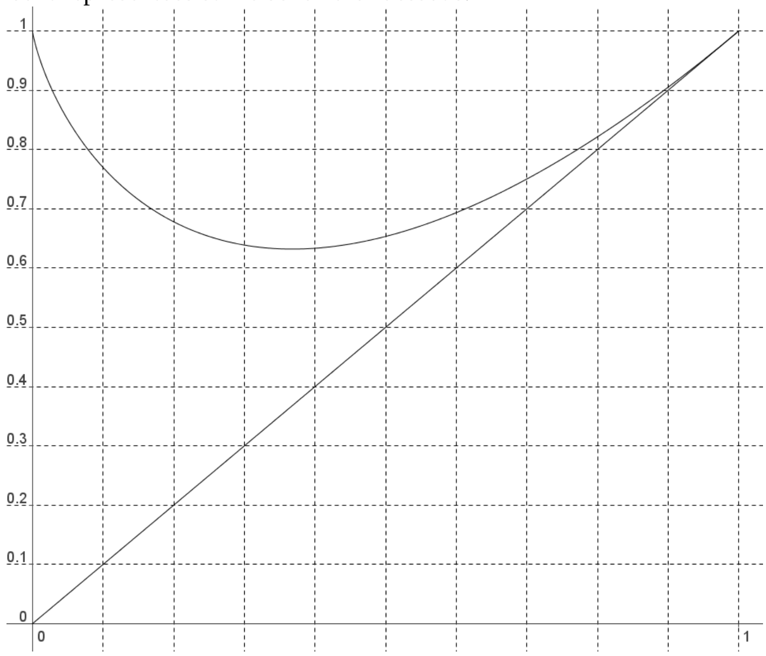
$$f(x) = 1 + x \ln x.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle] 0 ; 1].

C est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

T est la droite d'équation $y = x$.

La courbe C et la droite T sont représentées sur le schéma ci-dessous.



1. a. Justifier que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

b. En utilisant le signe de $x \ln x$ sur] 0 ; 1], montrer que, pour tout nombre réel $x \in$] 0 ; 1], on a $f(x) \leq 1$.

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x \in$] 0 ; 1].

b. Vérifier que la droite T est tangente à la courbe C au point d'abscisse 1.

3. On note g la fonction définie pour tout nombre réel $x \in$] 0 ; 1] par :

$$g(x) = 1 + x \ln x - x.$$

a. Étudier les variations de g sur l'intervalle] 0 ; 1]et dresser le tableau de variation de g.

On ne cherchera pas la limite de g en 0.

b. En déduire les positions relatives de la courbe C et de la droite T.

4. Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$. On pose $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{1} [1 - f(x)]\, \mathrm{d}x$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $I(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{2} \ln \alpha + \dfrac{1}{4} - \dfrac{\alpha^2}{4}$.

b. Déterminer $\lim\limits_{\alpha \to 0} I(\alpha)$.

c. Interpréter graphiquement le résultat précédent.

d. À l'aide des résultats précédents, déterminer, en unités d'aire, l'aire du domaine compris entre la courbe C , la droite T et l'axe des ordonnées.

Asie juin 2009

L'exercice comporte quatre questions indépendantes. Pour chacune d'entre elles, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Il s'agit de déterminer la bonne réponse et de justifier le choix ainsi effectué.

Un choix non justifié ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Question 1

La solution f de l'équation différentielle $y' + 2y = 6$ qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$ est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

Réponse (1) : $f(x) = -2\,e^{-2x} + 3$

Réponse (2) : $f(x) = -2\,e^{2x} + 3$

Réponse (3) : $f(x) = -2\,e^{-2x} - 3$

2. Question 2

On considère un triangle ABC et on note I le point tel que $2\,\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Les points G, I et A sont alignés lorsque G est le barycentre du système :

Réponse (1) : {(A, 1), (C, 2)}

Réponse (2) : {(A, 1), (B, 2), (C, 2)}

Réponse (3) : {(A, 1), (B, 2), (C, 1)}

3. Question 3

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan P d'équation cartésienne : $x - 3y + 2z = 5$ et le point A(2 ; 3 ; − 1).

Le projeté orthogonal du point A sur le plan P est le point :

Réponse (1) : $H_1(3 ; -1 ; 4)$

Réponse (2) : $H_2(4 ; -3 ; -4)$

Réponse (3) : $H_3(3 ; 0 ; 1)$

4. Question 4

La valeur moyenne de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 1] par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ est égale à :

Réponse (1) : $-\dfrac{\pi}{2}$ Réponse (2) : $\dfrac{\pi}{4}$ Réponse (3) : $\dfrac{\pi}{2}$.

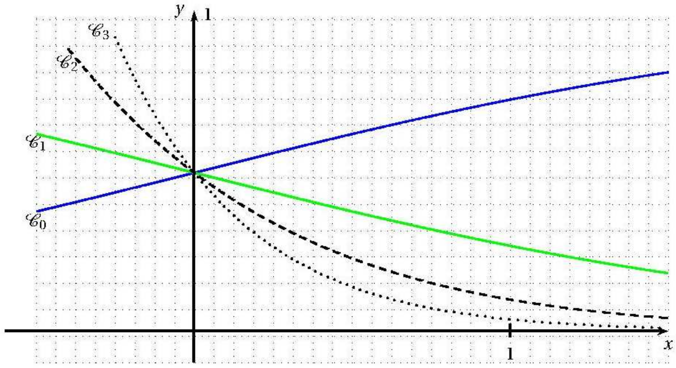
Centres étrangers juin 2009

Soit n un entier naturel.

On note f_n, la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}$.

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Les courbes C_0, C_1, C_2 et C_3 sont représentées ci-dessous :



Partie A : Quelques propriétés des fonctions f_n et des courbes C_n

1. Démontrer que pour tout entier naturel n les courbes C_n ont un point A en commun. On préciser ses coordonnées.

2. Étude de la fonction f_0

a. Étudier le sens de variation de f_0

b. Préciser les limites de la fonction f_0 en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement ces limites.

c. Dresser le tableau de variation de fonction f_0 sur $\mathbb{R}$.

3. Étude de la fonction f_1

a. Démontrer que $f_0(x) = f_1(-x)$ pour tout nombre réel x.

b. En déduire les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et $+\infty$, ainsi que son sens de variation.

c. Donner une interprétation géométrique de 3. *a*. pour les courbes C_0 et C_1.

4. Étude de la fonction f_n pour $n \geq 2$

a. Vérifier que pour tout entier naturel $n \geq 2$ et pour tout nombre réel x, on a : $f_n(x) = \dfrac{1}{e^{nx} + e^{(n-1)x}}$.

b. Étudier les limites de la fonction f_n en $-\infty$ et $+\infty$.

c. Calculer la dérivée $f'_n(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Étude d'une suite liée aux fonctions f_n

On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

1. Calculer u_1 puis montrer que $u_0 + u_1 = 1$. En déduire u_0.

2. Démontrer que, pour tout entier n : $0 \leq u_n \leq \int_0^1 e^{-nx}\,dx$.

3. Calculer l'intégrale : $\int_0^1 e^{-nx}\,dx$. En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

La Réunion juin 2009

Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\,e^{-x} \text{ et } g(x) = x^2\,e^{-x}.$$

On note C_f et C_g les représentations graphiques des fonctions f et g dans le plan muni d'un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A

La courbe représentative C_f de la fonction f dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est donnée en annexe (à rendre avec la copie).

1. D'après le graphique, quelles semblent être les variations de la fonction f et sa limite en $+\infty$?

2. Valider ces conjectures à l'aide d'une démonstration.

3. Tracer sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie) la courbe C_g représentative de la fonction g.

4. Quelle semble être la position relative de la courbe C_f par rapport à la courbe C_g ?

Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

Partie B

L'objectif de cette partie est de calculer, en unités d'aire, la mesure de l'aire A de la partie du plan comprise entre les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

1. Hachurer sur l'annexe cette partie du plan.

2. Soit $I = \int_0^1 f(x)\,dx$. Démontrer que $I = 1 - \dfrac{2}{e}$.

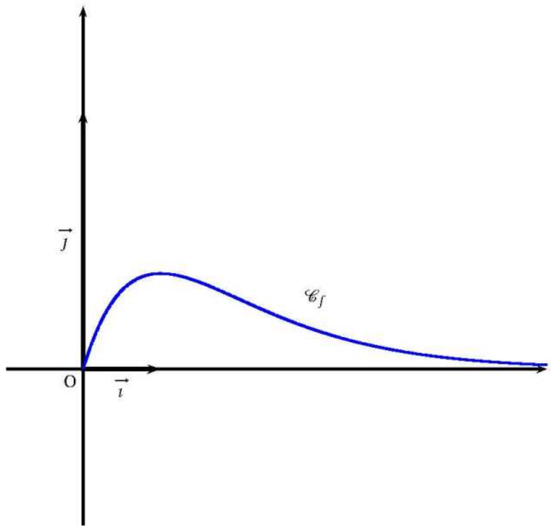
3. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soit H la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $H(x) = -(x^2 + 2x)\,e^{-x}$.

a. Calculer la dérivée H′ de la fonction H.

b. En déduire une primitive sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ de la fonction g.

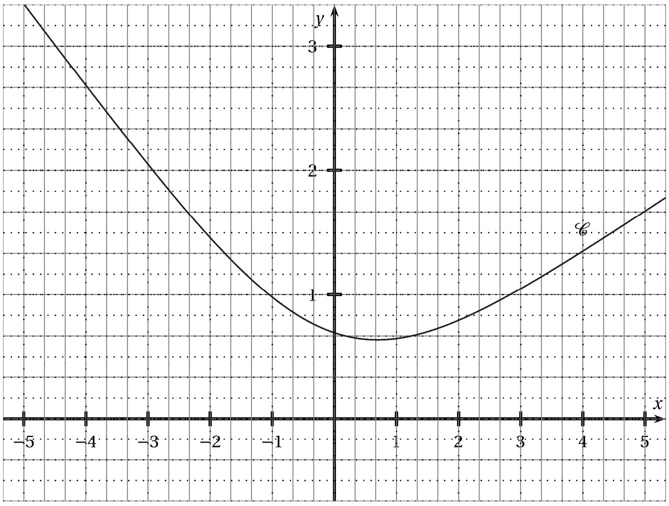
4. Déterminer la valeur exacte de l'aire A.



Liban juin 2009

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + \frac{1}{3}x$.

La courbe (C) représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



Partie A

1. *a.* Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe (C). Tracer (D).

c. Étudier la position relative de (D) et de (C).

d. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \ln(e^{x} + 1) - \frac{2}{3}x$.

e. En déduire la limite de f en $-\infty$

2. *a.* On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{e^{x} - 2}{3(e^{x} + 1)}$.

b. En déduire les variations de la fonction f.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle d_n, l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe (C), la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $d_n = \int_0^n \ln(1 + e^{-x})\,dx$

2. On admet que pour tout réel x, $\ln(1 + e^{-x}) \leq e^{-x}$.

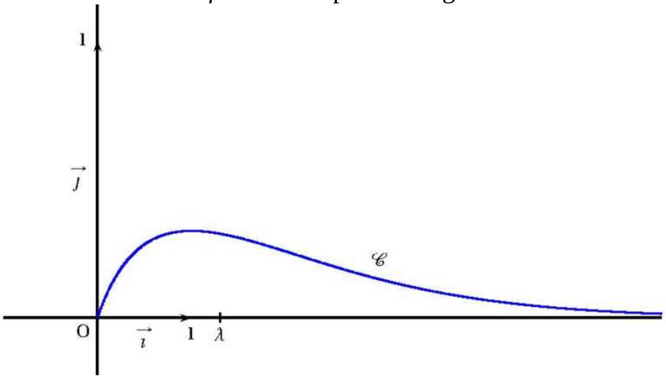
Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $d_n \leq 1$. La suite $(d_n)_{n \geq 1}$ est-elle convergente ?

Métropole juin 2009

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(1+x\,e^{-x})$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. La courbe C est représentée en ci-dessous.



PARTIE I

1. Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2. Justifier que pour tout nombre réel positif x, le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$.

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

PARTIE II

Soit λ un nombre réel strictement positif.

On pose $A(\lambda)=\int_0^{\lambda} f(x)\,dx$. On se propose de majorer A(λ) à l'aide de deux méthodes différentes.

1. Première méthode

a. Représenter, sur l'annexe jointe (à rendre avec la copie), la partie du plan dont l'aire en unité d'aire, est égale à A(λ).

b. Justifier que pour tout nombre réel λ strictement positif, $A(\lambda)\leq\lambda f(1)$.

2. Deuxième méthode

a. Calculer à l'aide d'une intégration par parties $\int_0^{\lambda} x\,e^{-x}\,dx$ en fonction de λ.

b. On admet que pour tout nombre réel positif u, $\ln(1+u)\leq u$.

Démontrer alors que, pour tout nombre réel λ strictement positif, $A(\lambda)\leq-\lambda\,e^{-\lambda}-e^{-\lambda}+1$.

3. Application numérique

Avec chacune des deux méthodes, trouver un majorant de A(5), arrondi au centième. Quelle méthode donne le meilleur majorant dans le cas où λ = 5 ?

Métropole juin 2009 sujet initial

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = 1 + x\,\mathrm{e}^{-x}$.

Sa courbe représentative C dans le repère orthonormal $(O\ ;\vec{i}, \vec{j})$ et la droite Δ d'équation $y = 1$ sont tracées ci-dessous.

Partie A

1. Justifier les propriétés suivantes constatées sur la représentation graphique.

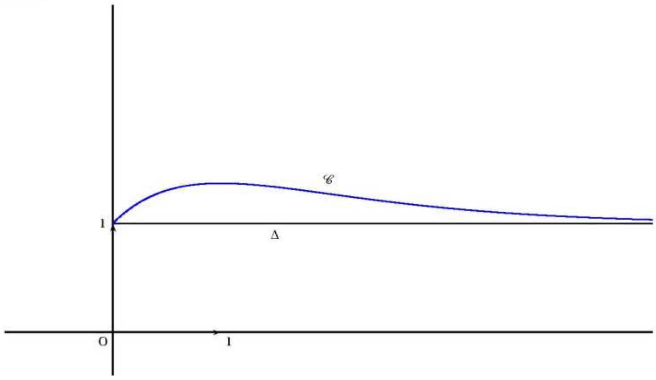
a. La droite Δ est asymptote à la courbe C en $+\infty$.

b. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $[1\ ;+\infty[$.

2. Soit t un nombre réel positif. On considère l'intégrale $\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$

a. Interpréter graphiquement cette intégrale.

b. Montrer que $\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = t - t\,\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t} + 1$.



Partie B

On note I le point de coordonnées (1 ; 0) et J le point de coordonnées (0 ; 1).

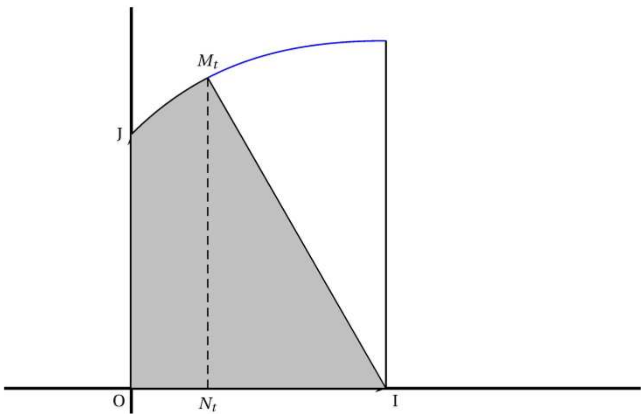
Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0\ ;1]$, M_t désigne le point de la courbe C d'abscisse t et N_t le point de coordonnées $(t\ ;0)$.

On appelle D_t, le domaine du plan délimité par la droite (IM_t), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées la courbe C .

Ce domaine est représenté par la zone grisée du graphique ci-dessous. Soit $\mathcal{A}(t)$ la mesure de son aire exprimée en unité d'aire.

1. Interpréter graphiquement $\mathcal{A}(0)$ et donner sa valeur exacte.
2. Interpréter graphiquement $\mathcal{A}(1)$ et donner sa valeur exacte.
3. Calculer l'aire du triangle M_tN_tI.
4. En déduire que pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0\ ;1]$, $\mathcal{A}(t) = \frac{3}{2} + \frac{t}{2} - \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + 1\right)\mathrm{e}^{-t}$.
5. *Dans cette question toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Existe-t-il un unique nombre réel α de l'intervalle $[0\ ;1]$ tel que $\mathcal{A}(\alpha) = \frac{1}{2} \times \mathcal{A}(1)$? Justifier la réponse.



Nouvelle-Calédonie novembre 2009

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 e^{-x}$.

On note f' la fonction dérivée de f.

1\. *a*. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.

b. Calculer $f'(x)$ et déterminer le tableau de variations de f.

c. En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.

2\. Pour tout nombre réel a, on considère l'intégrale : $I(a) = \int_0^a f(x)\,dx$.

a. Donner selon les valeurs de a le signe de $I(a)$.

b. À l' aide d'une double intégration par parties montrer que pour tout nombre réel a : $I(a) = 2 - 2e^a\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right)$.

c. En déduire pour tout nombre réel a : $\frac{1}{2}e^a I(a) = e^a - \left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right)$.

3\. Soient g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x$ et $h(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

On note C la courbe représentative de g et P celle de h.

a. Montrer que les courbes C et P ont la même tangente au point d'abscisse 0.

b. Déduire des questions précédentes la position relative des courbes C et P.

Nouvelle–Calédonie mars 2009

Soit f une fonction définie pour tout nombre réel x par : $f(x) = (1 + x)e^{-x}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1. *a*. Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

***b*.** Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

***c*.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Calculer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$.

En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

***d*.** Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-2 ; 5]$.

2. On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $I_n = \int_{-1}^{n} f(x)\,dx$

Dans cette question, on ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n \geq 0$.

b. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

3. a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tous réels a et b : $\int_a^b f(x)\,dx = (-2 - b)e^{-b} + (2 + a)e^{-a}$.

b. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

c. Déterminer : $\lim_{n \to +\infty} I_n$.

d. Donner une interprétation graphique de cette limite.

4. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx = e$. Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire ?

Polynésie septembre 2009

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f_n(x) = -nx - x\ln x$.

On note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n, dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

Les courbes (C_0), (C_1) et (C_2) représentatives des fonctions f_0, f_1 et f_2 sont données en annexe.

On rappelle que $\lim\limits_{x \to 0} x\ln x = 0$.

Partie A : Étude de la fonction f_0 définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f_0(x) = -x\ln x$.

1. Déterminer la limite de f_0 en $+\infty$.

2. Étudier les variations de la fonction f_0 sur $]0\,;+\infty[$.

Partie B : Étude de certaines propriétés de la fonction f_n, n entier naturel.

Soit n un entier naturel.

1. Démontrer que pour $x \in\ ]0\,;+\infty[$, $f'_n(x) = -n-1-\ln x$ où f'_n désigne la fonction dérivée de f_n.

2. *a.* Démontrer que la courbe (C_n) admet en un unique point A_n d'abscisse e^{-n-1} une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

b. Prouver que le point A_n appartient à la droite Δ d'équation $y = x$.

c. Placer sur la figure en annexe les points A_0, A_1, A_2.

3. *a.* Démontrer que la courbe (C_n) coupe l'axe des abscisses en un unique point, noté B_n, dont l'abscisse est e^{-n}.

b. Démontrer que la tangente à (C_n) au point B_n a un coefficient directeur indépendant de l'entier n.

c. Placer sur la figure en annexe les points B_0, B_1, B_2.

Partie C : Calculs d'aires

Pour tout entier naturel n, on considère le domaine du plan D_n délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C_n) et les droites d'équation $x = e^{-n-1}$ et $x = e^{-n}$.

On note I_n l'aire en unités d'aires du domaine D_n.

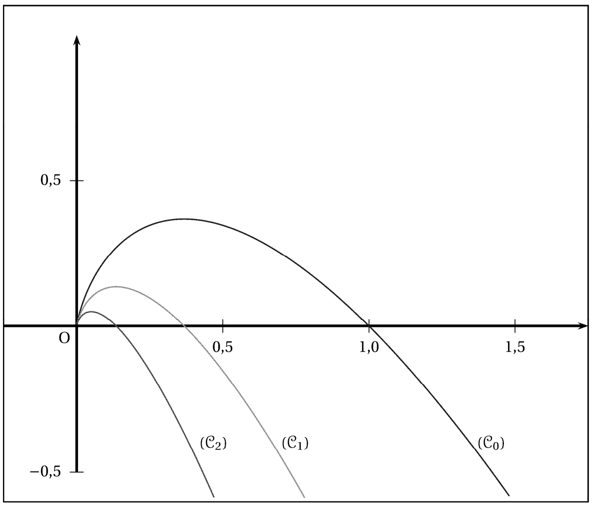
1. Hachurer, sur la figure donnée en annexe, les domaines D_0, D_1, D_2.

2. *a.* À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} x\ln x\,dx$.

b. En déduire que $I_0 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4e^2}$.

c. On admet que le domaine D_{n+1} est l'image du domaine D_n par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{e}$.

Exprimer I_1 et I_2 en fonction de I_0.

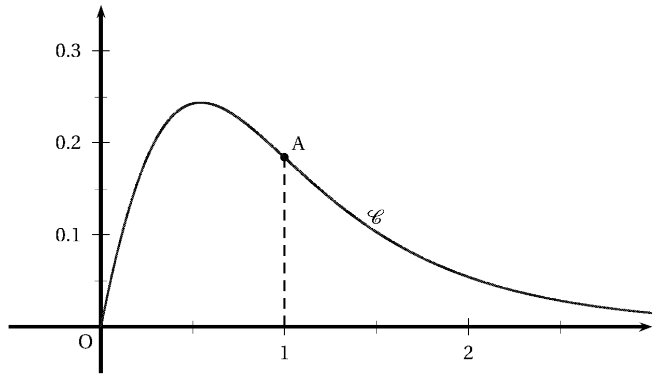


Polynésie juin 2009

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

La courbe (C), donnée ci-dessous, est la courbe représentative d'une fonction f dérivable sur $[0 ; +\infty[$, de fonction dérivée f' continue sur $[0 ; +\infty[$.



La courbe (C) passe par les points O et A $\left(1 ; \frac{1}{2\,e}\right)$ et, sur [0 ; 1], elle est au dessus du segment [OA].

1. Montrer que $\int_0^1 f'(x)\,dx = \frac{1}{2\,e}$.

2. Montrer que $\int_0^1 f(x)\,dx \geq \frac{1}{4\,e}$

Partie B

On sait désormais que la fonction f considérée dans la partie A est définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x\,e^{-x}}{x^2+1}$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_n^{2n} f(x)\,dx$.

a. Montrer que pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $0 \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$

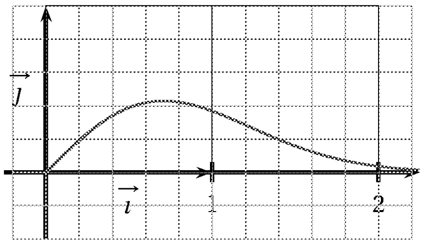
b. Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}(e^{-n} - e^{-2n})$.

c. En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Pondichéry avril 2009

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; + ∞ [par : $f(x) = x\ e^{-x^2}$

On désigne par C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) du plan. Cette courbe est représentée ci-dessous.



Partie A

1. *a.* Déterminer la limite de la fonction f en + ∞. (On pourra écrire, pour x différent de 0 : $f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$).

b. Démontrer que f admet un maximum en et calculer ce maximum.

2. Soit α un nombre réel positif ou nul. Exprimer en unités d'aire et en fonction de α, l'aire F(α) de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \alpha$.

Quelle est la limite de F(a) quand α tend vers + ∞ ?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

On ne cherchera pas à expliciter u_n .

1. *a.* Démontrer que, pour tout entier naturel n différent de 0 et de 1 : $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.

b. Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$?

c. Montrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

2. *a.* Vérifier que, pour tout entier naturel strictement positif n, $F(n) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

b. On donne ci-dessous les valeurs de F(n) obtenues à l'aide d'un tableur, pour n entier compris entre 3 et 7.

n	3	4	5	6	7
F(n)	0,499 938 295 1	0,499 999 943 7	0,5	0,5	0,5

Interpréter ces résultats.